BIBLIOTHECA BAMBERGENSIS

Lehrbuch

der

Mathematik,

für

Gymnasien und Lyzeen

von

Franz Ammon,

königl. Lyzeal-Professor in Augsburg.

Zweiter Band.

Die reine Elementar-Geometrie.

(Mit 4 lithographirten Tafeln.)

Augsburg, 1829.

Verlag der Kranzfelder'schen Buchhandlung.

Inhalt des zweiten Bandes.

Einleitung.

Erste Abtheilung.

Die Planimetrie.

Erster Abschnitt. Von Winkeln und Figuren überhaupt.
A) Von Winkeln.
B) Von Figuren.

Zweiter Abschnitt. Von der Congruenz der Figuren.
A) Congruenz der Dreiecke;
B) " " der Kreise;
C) " " der Vielecke.

Dritter Abschnitt. Theorie der Parallellinien.
Anwendung derselben auf die Berechnung der Dreiecks- und Vielecks-Winkel,

Vierter Abschnitt. Von Vierecken insbesondere.

Fünfter Abschnitt. Vom Maße der Winkel, und von den Linien an und in dem Kreise.

Sechster Abschnitt. Von der Aehnlichkeit der Figuren und den Proportionen bei denselben.

Siebenter Abschnitt. Die Kreismessung.

Achter Abschnitt. Von der Gleichheit der Figuren.

Neunter Abschnitt. Von der Ausmessung, Verwandlung und Theilung der Figuren.

Zweite Abtheilung.

Die Stereometrie.

Erster Abschnitt. Von der Lage der Ebenen.

Zweiter Abschnitt. Von körperlichen Winkeln und von Körpern überhaupt.

Dritter Abschnitt. Von der Gleichheit und den Verhältnissen der Körper.

Vierter Abschnitt. Von der Berechnung und Theilung der Körper.

Elementar-Geometrie.

Einleitung.

§. 1.

Begriff. Jener Theil der Mathematik, welcher von den räumlich ausgedehnten Größen handelt, wird **Geometrie** genannt.

*) Das Wort Geometrie ist griechischen Ursprungs, und bedeutet Feldmeßkunst, weil die Vermessungen auf der Oberfläche der Erde (in Aegypten wegen der jährlichen Ueberschwemmungen des Nils zuerst nothwendig) wahrscheinlich zur Erfindung dieser Wissenschaft führten. — Feldmeßkunst ist nur ein Theil der angewandten Geometrie.

Erklärungen.

1) Jene Größen nennt man **räumliche** oder **räumlich ausgedehnte**, welche uns unter der Form des **Raums** erscheinen; d. h. bei welchen die gleichartigen Dinge, aus welchen die Größen bestehen, sich uns **als zu gleicher Zeit außereinander vorhanden** darstellen.

2) Da das Gleichartige einer Größe im Raume nach einer dreifachen Richtung außereinander erscheinen kann, (neben- hinter- und übereinander), so hat der Raum drei Abmessungen (Dimensionen), welche

man mit den Namen Länge, Breite und Höhe (Tiefe, Dicke) bezeichnet.

*) In der Geometrie haben wir es blos mit Räumen zu thun, die begränzt sind; zu untersuchen, was der unendliche oder unbegränzte Raum sey, bleibt der Metaphysik überlassen.

3) Eine Raumsausdehnung, welche von allen Seiten begränzt ist, und alle drei Abmessungen hat, nennt man einen geometrischen Körper; eine Raumsausdehnung mit zwei Abmessungen (nach der Länge und Breite) heißt man Fläche, und eine Raumsausdehnung mit einer Abmessung (nach der Länge) Linie.

Was im Raume gar keine Ausdehnung hat, heißt ein Punkt.

*) Man unterscheide den geometrischen vom physikalischen Körper.

4) Dasjenige, womit eine Größe aufhört, zu seyn, was sie bis dahin war, heißt Gränze derselben.

Daher sind Flächen die Gränzen der Körper, Linien die Gränzen der Flächen, und Punkte die Gränzen der Linien.

Die Linien bestehen daher nicht aus Punkten, die Flächen nicht aus Linien, und die Körper nicht aus Flächen; denn die Gränze eines Dings ist nicht ein Bestandtheil desselben; sondern die Linien bestehen wieder aus Linien, und die kleinsten Theile einer Linie sind wieder Linien u. s. w.

§. 2.

Grundsatz der Congruenz.

Räumliche Größen nennt man congruent, wenn man sie so auf einander gelegt, oder so in einander geschoben denken kann, daß ihre Gränzen überall aufeinander fallen, und sie sich vollkommen decken.

§. 3.

Erklär. 1) Eine Linie AB heißt gerade, wenn in ihr die Lage aller Punkte blos durch die Lage zweier Punkte vollkommen bestimmt ist. (Fig. 1.)

*) Die gerade Linie gehört zu den einfachsten Begriffen, die sich durch keine Erklärung deutlicher machen lassen, als sie es ohnehin Jedem sind. Die Erklärung: die gerade Linie ist der kürzeste Weg zwischen 2 Punkten, enthält einen Cirkel. Die befriedigendste Erklärung, wenn man durchaus eine Erklärung fordert, wäre vielleicht: eine Linie heißt gerade, wenn sie nur sich selbst erzeugt (ihre Richtung nicht ändert.)

2) Jede Linie, welche nicht eine gerade, oder aus mehreren geraden zusammengesetzt ist, wird eine krumme (eine Curve) genannt.

Forderungssätze.

1) Zwischen zwei gegebenen Punkten eine Gerade zu ziehen.

2) Eine Gerade über ihre angenommenen Gränzen (Endpunkte) hinaus nach Belieben zu verlängern.

Folg. 1) Durch zwei Punkte ist die Lage einer Geraden, und wenn es ihre Endpunkte sind, auch zugleich die Länge derselben bestimmt. Zwischen zwei Punkten gibt es daher nur eine Gerade.

2) Gleiche gerade Linien sind congruent.

3) Zwei verschiedene Gerade können nur Einen Punkt miteinander gemein haben, (sich nur in Einem Punkte schneiden.)

4) Zwei Gerade können noch keinen Raum einschließen; denn zwei Linien, die einen Raum einschließen sollen, müssen wenigstens zwei Punkte miteinander gemein haben.

§. 4.

Grundsatz. Die kürzeste Linie zwischen zwei Punkten ist die Gerade zwischen denselben.

§. 5.

Erklär. Die kürzeste Linie zwischen zwei Gegenständen heißt ihre Entfernung.

Folg. Die Entfernung zweier Punkte ist die Gerade zwischen denselben.

§. 6.

Erklär. Eine Fläche heißt eben, oder eine Ebene, wenn eine Gerade, in beliebiger Richtung entlang derselben gelegt, sie mit allen ihren Punkten berührt, d. h. ganz in der Fläche liegt.

Jede Fläche, welche weder eben, noch aus mehreren Ebenen zusammengesetzt ist, wird eine krumme Fläche genannt.

§. 7.

Erklär. Eine Linie messen, heißt ihr Verhältniß zu einer anderen bekannten Linie (ihrem Maße) in Zahlen bestimmen.

Erste Abtheilung.

Die Planimetrie.

Erster Abschnitt.

Von Winkeln und Figuren überhaupt.

A. Von Winkeln.

§. 8.

Erklär. Wenn zwei Gerade AC und BC (Fig. 2.) sich schneiden, so heißt die Größe, um welche sie hinsichtlich ihrer Lage von einander abstehen, ein Winkel.

Die zwei Geraden, welche den Winkel bilden, heißen Schenkel, der Durchschnittspunkt C derselben heißt Spitze oder Scheitel des Winkels.

*) Dreifache Bezeichnungsart eines Winkels.

Folg. Die Größe eines Winkels hängt nicht von der Länge seiner Schenkel, sondern von der Größe ihres Abstandes von einander ab.

§. 9.

Erklär. 1) Wenn die beiden Schenkel AC und BC in eine gerade Linie fallen, so heißt der Winkel ein gerader; z. B. der Winkel ACB. (Fig. 3.)

Ein Winkel heißt hohl, wenn er kleiner, und erhaben, wenn er größer ist, als ein gerader. (Fig. 4. u. 5.)

2) Wenn zwei Winkel x und y (Fig. 6.) einen gemeinschaftlichen Schenkel CD haben, und wenn die beiden anderen Schenkel AC und BC in einer geraden Linie liegen, so nennt man solche Winkel *Nebenwinkel*.

Sind die beiden Nebenwinkel einander gleich, (wie m und n in Fig. 7), so heißt jeder ein *rechter Winkel* (R); sind sie aber ungleich, (Fig. 6.) so heißt jeder ein *schiefer*.

Ein schiefer Winkel heißt *spitzig*, wenn er kleiner, *stumpf*, wenn er größer ist, als ein rechter; so ist x ein stumpfer, und y ein spitziger Winkel.

3) Wenn eine Gerade CD (Fig. 7.) mit einer anderen AB rechte Winkel bildet, so heißt sie *senkrecht*, *lothrecht*, *perpendiculär* oder ein *Perpendikel* auf AB.

§. 10.

Uebersicht.

Gerade Winkel,

erhabene, — hohle,

hohle: rechte, — schiefe,

schiefe: stumpfe, — spitzige.

§. 11.

Lehrs. Wenn zwei Winkel ACB und ACD (Fig. 8) denselben Scheitel C und einen gemeinschaftlichen Schenkel CA haben, der andere Schenkel CB aber des einen Winkels zwischen den Schenkeln des andern Winkels liegt, so ist

$$ACB < ACD.$$

Bew. Nimmt man den gemeinschaftlichen Schenkel CB heraus, so wird aus den beiden Winkeln ein einziger, oder es wird ACD = ACB + BCD, folglich

$$ACD > ACB.$$

Folg. Gleiche Winkel auf einander gelegt, müßen sich decken, oder sind congruent.

*) Dabei ist nicht nothwendig, daß die Schenkel des einen Winkels eben die Länge haben, wie die des anderen; es genügt, daß sie sich in dem ihnen gemeinschaftlichen Theile decken.

§. 12.

Lehrs. Zwei Nebenwinkel sind zusammen einem geraden Winkel gleich.

Bew. Nimmt man (Fig. 6. und 7.) den gemeinschaftlichen Schenkel CD heraus, so werden beide Winkel vereinigt, und man erhält die Summe derselben, also wieder einen Winkel, dessen Schenkel in einer geraden Linie liegen.

Folg. 1) Jeder rechte Winkel ist die Hälfte eines geraden; denn (Fig. 7.)

es ist $m + n = 2m = G$; also auch

$m = \frac{1}{2} G$; es ist aber auch

$m = R$

folglich $R = \frac{1}{2} G$.

Folg. 2) Jede zwei Nebenwinkel sind zusammen zwei rechten gleich; denn sie sind einem geraden, und jeder gerade ist zwei rechten gleich. (Folg. 1.)

Folg. 3) Die Summe aller Winkel m, n, o, p, an einer Seite einer Geraden um einen auf derselben als Scheitel genommenen Punkt C beträgt immer zwei Rechte, wie groß auch die Anzahl dieser Winkel seyn mag. Denn sie sind zusammen dem geraden Winkel ACB gleich. (Fig. 9.).

Folg. 4) Wenn (Fig. 10.) zwei Winkel ACD und

BCD einen gemeinschaftlichen Schenkel CD haben, und zwei rechten gleich sind, so sind sie Nebenwinkel, d. h. die beiden anderen Schenkel AC und CB liegen in einer geraden Linie. Denn läge CB mit AC nicht in einer geraden Linie, so müßte AC über C hinaus verlängert, entweder oberhalb oder unterhalb CB fallen, nach E oder F. Beides aber ist unmöglich. Denn dann wäre

$$ACD + DCE = 2R \text{ und } ACD + DCF = 2R.$$

Nun ist $ACD + DCB = 2R$ (ex hyp.), folglich wäre

$$DCE = DCB \text{ und } DCB = DCF;$$

d. h. ein Theil dem Ganzen gleich.

*) Der rechte Winkel ist das Maß zur Bestimmung der Größe aller anderen Winkel.

§. 13.

Lehrs. Gerade Winkel sind congruent. (Fig. 11.)

Bew. Man lege F auf C und FD auf CA, so müssen auch die beiden Schenkel FE und CB aufeinander fallen, weil sie mit FD und CA in gerader Linie liegen, und durch jede zwei Punkte der aufeinander gelegten Schenkel FD und CA auch die Lage ihrer Verlängerungen bestimmt ist. (§. 3. Folg. 1.)

Folg. Alle rechten Winkel sind, als die Hälften gleicher gerader Winkel, auch gleich.

§. 14.

Erklär. Wenn zwei Winkel einen gemeinschaftlichen Scheitel haben, und die Schenkel des einen die rückwärts verlängerten Schenkel des anderen sind, so heißen sie Scheitel- oder Vertikal-Winkel, m und o, n und p. (Fig. 12.)

Folg. 1) Scheitelwinkel sind gleich; d. i.

da $m + n = 2R$

und $\underline{n + o = 2R}$ ist, so folgt

$m = o.$

Eben so wird $n = p$.

2) Wenn sich zwei Gerade schneiden, so entstehen immer zwei Paar Scheitelwinkel.

3) Zwei aufeinander senkrechte Linien bilden unter einander vier rechte Winkel (Fig. 13.); denn wird AC, welche mit DB die 2 rechten Winkel m und n bildet, verlängert, so bildet ihre Verlängerung AE auch an der anderen Seite von DB zwei rechte Winkel o und p; weil o und p von n und m Scheitelwinkel sind.

4) Wenn CE auf DB senkrecht ist, so ist auch DB auf CE senkrecht.

5) Die Summe aller Winkel um einen Punkt in einer Ebene beträgt vier Rechte.

B.) Von Figuren überhaupt.

§. 15.

Erklärungen.

1) Eine von allen Seiten begränzte Ebene nennt man eine ebene Figur.

Die Gränzen einer Figur sind Linien.

2) Eine Figur heißt gerad- oder krummlinigt, je nachdem sie von geraden oder krummen Linien begränzt wird.

3) Bei den geradlinigten Figuren heißen die einschließenden Linien die Seiten, und die von den Seiten gebildeten Winkel die Ecken der Figur.

Alle Seiten einer Figur zusammengenommen nennt man den Umfang, (Perimeter.)

4) Jede von einer Ecke zu einer anderen gezogene Gerade, welche mit keiner Seite der Figur zusammenfällt, heißt eine Diagonale.

6) Eine Figur ist regulär, wenn alle ihre Seiten und Winkel gleich sind; irregulär, wenn entweder ihre Seiten, oder ihre Winkel, oder beide ungleich sind.

Folg. 1) Jede geradlinigte Figur hat eben so viel Ecken, als Seiten.

2) Jede Linie, welche einen Punkt innerhalb, und einen anderen außerhalb einer Figur hat, durchschneidet den Umfang der Figur wenigstens in einem Punkte.

3) Wenn von einer Figur ein Punkt innerhalb, und ein anderer Punkt außerhalb einer anderen Figur liegt, so schneiden sich die Perimeter beider Figuren wenigstens in zwei Punkten.

4) Eine geradlinigte Figur kann nicht weniger, als drei Seiten haben.

§. 16.

Erklär. Eine dreiseitige Figur wird ein Dreieck, eine vierseitige ein Viereck, und überhaupt eine mehrseitige ein Vieleck (Polygon) genannt.

Folg. 1) Das Dreieck ist die einfachste geradlinigste Figur. (§. 15. Folg. 4.)

2) In jedem Dreiecke ist die Summe zweier Seiten immer größer, als die dritte.

§. 17.

Erklär. Eine krummlinigte ebene Figur heißt ein Kreis, oder eine Kreisebene, wenn sie von einer krummen Linie begränzt wird, welche so beschaffen ist, daß alle Punkte in ihr von einem gewissen Punkte innerhalb der begränzten Ebene gleich weit entfernt sind.

a) Vom Kreise.

§. 18.

Erklär. Beim Kreise (§. 17.) (Fig. 14.) nennt man

1) die krumme Linie, von welcher er begränzt wird, Kreislinie oder Peripherie;

2) jeden einzelnen Theil AB der Peripherie einen Kreisbogen;

3) den Punkt C innerhalb des Kreises, von dem alle Punkte der Peripherie gleichweit entfernt sind, Mittelpunkt, (Centrum);

4) jede vom Mittelpunkt bis zur Peripherie gezogene Gerade CA oder CB einen Halbmesser, (Radius);

5) jede von einem Punkte A der Peripherie zu einem anderen B gezogene Gerade AB eine Sehne (Chorde);

6) jede Sehne EF, die durch den Mittelpunkt geht, einen Durchmesser, (Diameter);

7) jeden Winkel ACB, dessen Scheitel im Mittelpunkte liegt, und dessen Schenkel CA, CB Halbmesser sind, einen Centri- oder Mittelpunktswinkel;

8) jeden Winkel EKF, dessen Scheitel in der Peripherie liegt, und dessen Schenkel Sehnen sind, einen Peripheriewinkel;

9) jeden zwischen zwei Radien CA, CB und dem Bogen AB enthaltenen Theil ACB der Kreisebene einen Ausschnitt, (Sektor);

10) jeden zwischen einer Sehne AB und dem dazu gehörigen Bogen AB enthaltenen Theil der Kreisebene Abschnitt, (Segment).

Folg. 1) Alle Radien eines Kreises sind gleich.

2) Der Durchmesser ist dem doppelten Halbmesser gleich; daher sind

3) auch alle Durchmesser eines Kreises gleich.

4) Ein Punkt liegt innerhalb, oder ausserhalb, oder in der Peripherie, je nachdem dessen Entfernung vom Mittelpunkte kleiner, oder größer, als der Halbmesser, oder dem Halbmesser gleich ist; und umgekehrt.

§. 19.

Erklär. 1) Je nachdem mehrere Kreise einerlei oder verschiedene Mittelpunkte haben, nennt man sie concentrisch, oder excentrisch. (Fig. 15. und 16.)

2) Die Gerade AB, welche die Mittelpunkte zweier excentrischer Kreise verbindet, heißt ihre Centrallinie.

§. 20.

Aufg. Aus einem Punkte C einen Kreis zu beschreiben, der eine Gerade AB von unbestimmter Länge wenigstens in 2 Punkten schneidet. (Fig. 17.)

Aufl. Man ziehe von C zur geraden die Linie CD, und beschreibe mit einem Halbmesser $CF > CD$ einen Kreis.

Bew. Der Punkt D der Linie AB liegt innerhalb des Kreises; wird nun die Gerade beiderseits bis über den Kreis hinaus verlängert, so hat jeder Theil derselben DA und DB einen Punkt D innerhalb, und einen anderen außerhalb des Kreises; folglich u. s. w.

§. 21.

Aufg. Von einer Geraden AM einen Theil abzuschneiden, der einer anderen gegebenen Geraden ab gleich ist. (Fig. 18.)

Aufl. und Bew. Mit einem Halbmesser = ab beschreibe man aus A einen Kreis, so schneidet, weil $ab < AM$ ist, derselbe die Linie AM in B, und es ist $AB = ab$.

§. 22.

Lehrs. Wenn die Halbmesser zweier excentrischer Kreise und ihre Centrallinie so beschaffen sind, daß je zwei dieser Linien zusammen größer sind, als die dritte, so schneiden sich die Kreise wenigstens in zwei Punkten; (Fig. 16.)
d. i. wenn 1) $AB + AF > BD$

oder 2) $AB + BE > AC$
oder 3) $BD + AC > AB$.

Bew. Nach 1) ist $BF > BD$ also liegt ein Punkt F des Kreises um A außerhalb des Kreises um B.

Nach 2) ist $AE > AC$; also liegt der Punkt C des Kreises um A zwischen A und E.

Dieser Punkt C kann aber weder auf D fallen; sonst wäre $BD + CA = BA$, gegen Nr. 3; noch zwischen A und D; sonst wäre $BD + CA < BA$, gegen No. 3; also kann C nur zwischen D und E d. h. innerhalb des Kreises um B fallen. Der Kreis um A hat also einen Punkt F ausserhalb, und einen anderen C innerhalb des Kreises um B, folglich (§. 15. Folg. 3.)

Folg. Will man daher aus den beiden Endepunkten einer Geraden AB (Fig. 19.) Kreise beschreiben, welche sich ober- und unterhalb AB schneiden sollen, so müssen die Gerade AB und die beiden Halbmesser so beschaffen seyn, daß je zwei dieser Linien zusammen größer sind, als die dritte.

b) Von Dreiecken.

§. 23.

Erklär. 1) Ein Dreieck heißt ungleichseitig, wenn alle drei Seiten ungleich; gleichschenklicht, wenn zwei Seiten gleich sind, und gleichseitig, wenn alle drei Seiten gleich sind.

2) Jene Seite eines Dreiecks, auf welche man sich dasselbe gestellt denkt, nennt man seine Grundseite, und den derselben gegenüberliegenden Winkelpunkt seine Spitze.

Im gleichschenklichten Dreiecke nimmt man die ungleiche Seite als Grundseite an.

3) Ein Dreieck heißt spitzwinklicht, wenn alle drei Winkel spitzig sind; stumpfwinklicht, wenn es einen

stumpfen, **rechtwinklicht**, wenn es einen rechten Winkel hat.

4) Im rechtwinklichen Dreiecke nennt man die Seiten, welche den rechten Winkel einschließen, **Perpendikel** oder **Katheten**, jene Seite, welche dem rechten Winkel gegenübersteht, **Hypotenuse**.

Zweiter Abschnitt.

Von der Congruenz der Figuren.

A) Congruenz der Dreiecke.

§. 24.

Erklärung. Dreiecke sind congruent, wenn sie sich decken.

Folg. In congruenten Dreiecken sind alle Seiten und Winkel einzeln einander gleich.

§. 25.

Erklärung. 1) Die Bedingungen, unter welchen aus der Gleichheit von drei Stücken in zwei oder mehrern Dreiecken die Congruenz der Dreiecke folgt, nennt man **Kriterien der Congruenz der Dreiecke**.

2) Winkel, welche gleichen Seiten gegenüber-, oder an gleichen Seiten anliegen, und Seiten, welche gleichen Winkeln gegenüber, oder an gleichen Winkeln anliegen, heißt man **homologe Winkel** oder **Seiten**.

§. 26.

Lehrs. Erstes Kriterium.

Zwei Dreiecke sind congruent, wenn zwei Seiten mit

dem davon eingeschlossenen Winkel des einen, zweien Seiten mit dem davon eingeschlossenen Winkel des anderen Dreiecks gleich sind; d. i. (Fig. 20.)

wenn AC = ac, BC = bc und C = c ist,

so ist △ ABC ≅ △ abc, und

AB = ab, A = a und B = b.

Bew. Man lege △ abc so auf △ ABC, daß c auf C und ca auf CA zu liegen kömmt, so muß auch cb auf CB, b auf B und a auf A fallen, weil (ex hyp.)

C = c, AC = ac und BC = bc ist.

Da nun die Endpunkte der Linien ab und AB aufeinander fallen, so müssen sich diese Linien decken.

Beide Dreiecke decken sich also vollkommen.

Folg. 1. Durch zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel ist ein Dreieck vollkommen bestimmt; denn ein anderes Dreieck mit eben diesen Bestimmungsstücken ist mit dem ersteren congruent, folglich mit ihm einerlei.

Folg. 2. In congruenten Dreiecken sind die homologen Winkel und Seiten gleich.

§. 27.

Lehrs. Wenn in einem Dreiecke zwei Seiten gleich sind, so sind auch die denselben gegenüberliegenden Winkel gleich; d. i. (Fig. 20.)

wenn BC = AC ist, so

ist auch A = B.

Bew. Im △ abc sey

ac = AC, bc = BC und c = C;

so ist auch a = A, b = B; und

ac = AC = bc = BC. (§. 26.)

Legt man nun c auf C, und ca auf CB, so fällt a auf B, cb auf CA und b auf A, folglich auch ab auf BA; die Dreiecke sind also auch in dieser Lage congruent.

Daher wird a = B, und
da A = a ist,
so wird A = B.

Folg. 1. Im gleichschenklichten Dreiecke sind die Winkel an der Grundseite gleich.

Folg. 2. Im gleichseitigen Dreiecke sind alle drei Winkel gleich. Das gleichseitige Dreieck ist also eine reguläre Figur.

§. 28.

Lehrs. Zweites Kriter. Zwei Dreiecke sind congruent, wenn eine Seite und die beiden anliegenden Winkel des einen, einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln des andern Dreiecks gleich sind; d. i. (Fig. 20.)

wenn AB = ab, A = a und B = b ist,

so ist $\triangle ABC \cong \triangle abc$, und auch

AC = ac, BC = bc und C = c.

Bew. Man lege a auf A und ab auf AB, so muß b auf B, ac auf AC und bc auf BC fallen. Nun liegt c in der Richtung AC und in der Richtung BC, folglich in dem Durchschnittspunkte der Linien AC und BC, d. i. in C. Die Dreiecke also decken sich vollkommen.

Folg. Durch eine Seite und zwei anliegende Winkel ist ein Dreieck vollkommen bestimmt.

§. 29.

Lehrs. Wenn in einem Dreiecke zwei Winkel gleich sind, so sind auch die ihnen gegenüberliegenden Seiten gleich; (Fig. 20.)

d. i. wenn A = B ist, so
ist auch BC = AC.

Bew. Im $\triangle acb$ sey

ab = AB, a = A und b = B,

so ist dann auch ac = AC, bc = BC; und

a = A = b = B.

Legt man nun a auf B, und ba auf BA, so fällt b auf A, b c auf AC und ac auf BC, folglich auch c auf C; die Dreiecke decken sich, und sind congruent.

Daher wird bc = AC; und
da bc = BC ist,
so wird BC = AC.

Folg. 1. Sind in einem Dreiecke zwei Winkel gleich, so ist es gleichschenklicht.

2. Ein gleichwinklichtes Dreieck ist auch gleichseitig, folglich eine reguläre Figur.

§. 30.

Lehrs. Drittes Kriterium. Wenn zwei Dreiecke wechselseits alle drei Seiten gleich haben, so sind sie congruent; (Fig. 20.)

d. i. wenn AB = ab, AC = ac und BC = bc ist,

so ist $\triangle ABC \cong \triangle abc$, und

daher auch A = a, B = b und C = c.

Bew. Man lege die Dreiecke so nebeneinander, daß c auf C, und cb auf CB zu liegen kömmt, so wird auch b auf B fallen, und a und A auf entgegengesetzten Seiten von BC liegen.

Verbindet man A und a durch die Gerade Aa, so fällt diese

1) entweder mit den Seiten BA und ba zusammen, (Fig. 21.) oder

2) sie liegt innerhalb (Fig. 22.), oder

3) ausserhalb der Dreiecke. (Fig. 23.)

1) Im $\triangle$ aCA ist ac = AC (ex hyp)

folglich a = A;

daher $\triangle acb \cong \triangle ACB$.

2) Im $\triangle$ aCA ist ac = AC;

daher n = m; und

im △ aAB ist ab = AB;

daher p = o;

folglich n + p = m + o,

oder BAC = bac, und

△ ABC ≅ △ abc.

3) Im △ aCA ist ac = AC;

daher aAc = CaA; und

im △ abA ist ab = AB;

daher n = m;

folglich aAC — n = CaA — m, oder

BAC = bac, und

△ ABC ≅ △ abc.

Folg. Durch 3 Seiten ist ein Dreieck völlig bestimmt.

Verschiedene Aufgaben und Lehrsätze, deren Auflösungen und Beweise von der Congruenz der Dreiecke abhängen.

§. 31.

Aufg. Aus drei gegebenen Graden, AB, BC und AC, (Fig. 24.) ein Dreieck zu verzeichnen.

Aufl. Man nehme eine dieser Geraden, z. B. AB als Grundseite, und beschreibe aus A mit dem Halbmesser AC und aus B mit dem Halbmesser BC Kreise, so werden sich diese in zwei Punkten D und E schneiden

Verbindet man diese Punkte mit den Endpunkten der Geraden AB, so erhält man zwei Dreiecke, welche der Aufgabe Genüge thun.

Bew. Nach §. 30. Folg.

*) Damit aber die Kreise sich schneiden, so müssen von den gegebenen Geraden je zwei zusammen größer seyn, als die dritte.

Folg. 1) Sind zwei der gegebenen Geraden gleich, so erhält man ein gleichschenklichtes, und wenn alle drei gleich sind, ein gleichseitiges Dreieck.

Folg. 2) Um ober- oder unterhalb einer gegebenen Geraden AB ein gleichschenklichtes Dreieck zu verzeichnen, beschreibe man mit einem Halbmesser, der größer ist, als $\frac{1}{2}$ AB, aus A und B Kreise (oder auch nur Kreisbögen), und verbinde den oberen oder den unteren Durchschnittspunkt durch gerade Linien mit A und B.

§. 32.

Aufg. An eine Gerade ab (Fig. 25.) einen Winkel zu verzeichnen, der dem gegebenen Winkel A gleich ist.

Aufl. Man schneide aus A mit einem beliebigen Halbmesser von den Schenkeln des gegebenen Winkels die gleichen Stücke AC und AB ab, und ziehe CB. Aus a beschreibe man mit einem Halbmesser = AB einen Bogen, der ab in b schneidet. Aus b beschreibe man mit einem Halbmesser = BC einen anderen Kreisbogen, welcher den ersten in c schneidet und ziehe von diesem Durchschnittspunkte nach a eine Gerade.

Bew. Zieht man bc, so ist (§. 30.)

$$\triangle abc \cong \triangle ABC,$$

und $a = A$.

§. 33.

Aufg. Einen gegebenen Winkel C (Fig. 26.) zu halbiren.

Aufl. Man schneide mit einem beliebigen Halbmesser von C aus auf den Schenkeln des Winkels gleiche Stücke CA, CB ab, ziehe AB, verzeichne auf der Linie AB das gleichschenklichte Dreieck (§. 31. Folg. 2.) AFB, und ziehe von dessen Spitze F eine Gerade nach C, so ist

$$o = p = \tfrac{1}{2} C.$$

Bew. Es ist $AC = BC$; $AF = BF$; $CF = CF$; folglich $\triangle AFC \cong \triangle CFB$, und

$$o = p.$$

Folg. Man kann die erhaltenen Hälften wieder halbiren, und durch n Halbirungen den Winkel in 2^n gleiche Theile theilen.

§. 34.

Aufg. Eine Gerade AB durch eine Senkrechte zu halbiren. (Fig. 27.)

Aufl. Man errichte ober- und unterhalb der Geraden AB zwei gleichschenklichte Dreiecke, und verbinde ihre Spitzen F und G durch die Gerade FG, so steht diese senkrecht auf AB und halbirt AB.

Bew. Es ist AF = FB; AG = BG; FG = GF;
folglich △ AFG ≌ △ BFG, und
n = m;
dazu ist noch AF = FB und FC = FC;
daher △ AFC ≌ △ FCB;
folglich AC = CB = $\frac{1}{2}$ AB, und
o = p = R.

Folg. Durch n Halbirungen kann jede Gerade in 2^n gleiche Theile getheilt werden.

§. 35.

Lehrs. Der durch die Verlängerung einer beliebigen Dreiecksseite AC entstehende äussere Winkel ist größer, als jeder der inneren Winkel, von welchen keiner sein Nebenwinkel ist; d. i. (Fig. 28.)

I.) BCF > B und

II.) BCF > A.

Bew. für I. Man halbire BC in G, mache AG = GH, und ziehe CH, so ist
BG = GC; AG = GH; und m = n;
folglich △ ABG ≌ GHC, und
o = B.

$$\text{Es ist aber } BCF > o,$$
$$\overline{BCF > B.}$$

Für II. Man verlängere BC, (Fig. 29.) halbire AC in M, mache BM = MN, und ziehe CN; so ist

$AM = MC$; $BM = MN$; und $x = y$;

folglich $\triangle ABM \cong MNC$, und

$q = A$.

Es ist aber $MCL > q$, also

$MCL > A$

$MCL = BCF$, folglich

$BCF > A$.

Folg. 1) In jedem Dreiecke sind jede zwei Winkel zusammengenommen kleiner, als 2 rechte; d. i. (Fig. 30.)

1) $a + c < 2 R$;

denn es ist $a < m$; daher

$a + c < m + c$;

$\underline{m + c = 2 R}$

folglich $a + c < 2 R$.

Eben so wird

2) $b + c < 2 R$, und

3) $a + b < 2 R$.

Folg. 2. Ein Dreieck kann daher nicht mehr als einen rechten oder stumpfen Winkel, und muß immer wenigstens zwei spitzige haben.

Folg. 3. Im gleichschenklichten Dreiecke sind die Winkel an der Grundseite, und im gleichseitigen alle drei Winkel spitzig.

§. 36.

Lehrs. In jedem Dreiecke steht der größeren Seite der größere Winkel, und dem größeren Winkel die größere Seite gegenüber; (Fig. 31.)

d. i. I.) wenn $BC > AC$ ist, so ist

auch $A > B$, und

II.) wenn $A > B$ ist, so ist
auch $BC > AC$.

Bew. für I. Man mache $CD = AC$, und ziehe AD,
so ist $m = n$;
Nun ist $n > B$,
also auch $m > B$
Es ist aber $BAC > m$, also um so mehr
$A > B$.

Bew. für II.

Wäre $BC = AC$; so wäre $A = B$; } (contra
wäre $BC < AC$, so wäre $A < B$; } hyp.)
folglich ist $BC > AC$.

Folg. Im rechtwinklichten Dreiecke ist die Hypotenuse und im stumpfwinklichten die dem stumpfen Winkel gegenüberstehende Seite die größte.

§. 37.

Lehrs. Zwei Gerade AE und EB, (Fig. 32.) welche zwei Winkelpunkte eines Dreiecks mit einem Punkte E innerhalb desselben verbinden, sind zusammen kleiner, als die Summe der zwei Seiten AC und BC, schließen aber einen größeren Winkel ein; d. i.

$AE + EB < AC + CB$ und
$m > o$.

Bew. Es ist, wenn man AE bis zur Seite CB verlängert.

$AC + CD > AD$ oder
$AC + CD > AE + ED$.
Eben so ist $BD + ED > EB$
folglich $AC + CD + BD > AE + EB$ d. i.
$AC + CB > AE + EB$.
Ferner ist $m > n$ und
$n > o$,
folglich $m > o$.

§. 38.

Aufg. Aus einem Punkte C (Fig. 33.) einer Geraden AB eine Senkrechte zu errichten.

Aufl. Aus C schneide man CD = CE ab, errichte über DE das gleichschenkliche △ DGE, und ziehe von dessen Spitze G eine Gerade nach C, so steht CG senkrecht auf AB.

Bew. Es ist CD = DE; DG = EG, und CG = CG, daher △ CDG ≌ △ CEG, folglich

m = n = R.

Folg. 1. Im Punkte C kann nur eine Senkrechte errichtet werden; denn wäre z. B. CH auch senkrecht auf AB, so wäre

DCH = R = DCG.

Folg. 2. Eben darum kann auch eine Gerade AB nicht auf dem Durchschnittspunkte C zweier anderer sich schneidender Geraden CH und CG zugleich senkrecht seyn.

§. 39.

Aufg. Von einem ausserhalb einer Geraden MN liegenden Punkt F eine Senkrechte auf sie zu fällen. (Fig. 34.)

Aufl. Man beschreibe aus F einen Kreis, welcher die Linie MN in zwei Punkten A und B schneidet. Man errichte nun unter der Linie AB das gleichschenklichte △ AGB, und verbinde dessen Spitze G mit F, so steht FG oder FC senkrecht auf MN.

Bew. Wie im §. 34.

Folg. FC ist die einzige Senkrechte auf MN; denn wäre auch noch eine andere z. B. FA darauf senkrecht, so hätte das △ AFC zwei rechte Winkel.

2. Eine Gerade AB kann nicht auf zwei anderen sich schneidenden Geraden FC und FA ausserhalb ihres Durchschnittspunkts zugleich senkrecht stehen.

3. Da jede andere Linie, als FC, z. B. FA > FC ist, so ist FC die kürzeste Linie von C auf MN, und daher auch die Entfernung des Punktes C von MN.

§. 40.

Lehrs. Viertes Kriterium.

Wenn in zwei Dreiecken zwei Seiten und der der grösseren dieser Seiten gegenüberliegende Winkel gleich sind, so sind die Dreiecke congruent; d. i. (Fig. 35.)

wenn $BC = bc$; $AB = ab$; $C = c$ und

$BA > BC$, $ba > bc$ ist;

so ist $\triangle ABC \cong \triangle abc$, und

$AC = ac$; $A = a$, und $B = b$.

Bew. Man lege △ abc so auf △ ABC, daß c auf C und ca auf CA zu liegen kömmt, so muß auch cb auf CB und b auf B fallen, und die Dreiecke würden sich decken, wenn auch a auf A fiele. Es muß aber a auf A fallen; denn a kann

1) weder zwischen C und A, z. B. nach E, noch

2) in die Verlängerung von CA, z. B. nach D fallen.

Wenn nämlich a auf E fiele, so

wäre $\triangle CBE \cong \triangle cba$, daher auch

$BE = ba$, und

$BE = BA$, und im $\triangle ABE$

$n = m$.

Es ist abe $m > C$, also wäre

$n > C$, und im $\triangle ABC$

$CB > BA$. (contra hyp.)

Wenn a auf die Verlängerung von CA nach D fiele, so wäre

$BD = ba = BA$, mithin im $\triangle ABD$

$o = p$.

Es ist aber $o > C$, also wäre auch

$p > C$; mithin im $\triangle CBD$

$CB > BD$, und im $\triangle CAB$

$CB > BA$. (contra hyp.)

Folg. 1) Durch zwei Seiten und den der größeren derselben gegenüberliegenden Winkel ist ein Dreieck vollkommen bestimmt.

2) Zwei rechtwinklichte Dreiecke sind congruent, wenn sie ausser der Hypotenuse einen Perpendikel gleich haben.

§. 41.

Lehrs. Wenn man aus irgend einem Punkte D der Senkrechten DC nach gleichen Entfernungen von C die Geraden DE und DF zieht, so ist (Fig. 36.)

1) DE = DF;

2) $r = x$, und beide spitzig;

3) $o = y$, und beide stumpf.

Bew. Es ist △ DCE ≌ △ DCF, also

DE = DF, und

$r = x$, und beide spitzig.

(§. 35. Folg. 2.)

Dann ist $r + o = 2R = x + y$; folglich

$o = y$ und beide stumpf.

Folg. 1) Wenn DG weiter von C entfernt ist, als DE, so ist

1) DG > DE, weil o stumpf ist;

und 2) $m < r$.

Folg. 2) Wenn DH näher bei C liegt, als DE, so ist

1) DH < DE, weil s spitzig, also n stumpf ist;

und 2) $s > r$.

Folg. 3) Durch zwei Seiten und den Winkel, der der kleineren Seite gegenüber steht, ist ein Dreieck noch nicht bestimmt; sondern es gibt mit diesen Bestimmungsstücken zwei Dreiecke DGE und DGF; denn diese beide Dreiecke haben den der kleineren Seite DF gegenüberliegenden Winkel m und die größere Seite DG gemeinschaftlich, und wenn man CE = CF nimmt, so ist auch DE = DF.

§. 42.

Erklär. Die Entfernung der Spitze D eines Dreiecks GDF oder GDE oder GDC von der Grundseite desselben, oder deren Verlängerung, d. i. die Senkrechte DC wird die Höhe des Dreiecks genannt. (Fig. 36.)

Folg. 1) Mehrere Dreiecke, (Fig. 36.) deren Grundseiten in einer geraden Linie, und deren Spitzen in demselben Punkte D liegen, haben die gemeinschaftliche Höhe DC. (§. 39. Folg. 1.)

2) In einem rechtwinklichten Dreiecke fällt die Höhe wenn der eine Perpendikel als Grundseite betrachtet wird, mit dem anderen zusammen.

3) In einem schiefwinklichten Dreiecke GDF fällt die Höhe DC innerhalb des Dreieckes; denn fiele sie ausserhalb wie DK, so wäre im △ FDK K ein rechter Winkel, und y ein stumpfer. (§. 35. Folg. 2.)

4) In einem rechtwinklichten Dreiecke, wenn die Seite zwischen den beiden spitzigen Winkeln als Grundseite betrachtet wird, fällt aus dem nämlichen Grunde die Höhe ebenfalls innerhalb des Dreiecks.

5) In einem Dreiecke GDH, welches an der Grundseite GH einen stumpfen Winkel n hat, fällt die Höhe DC ausserhalb des Dreiecks auf die verlängerte Grundseite; denn fiele sie innerhalb wie DE, so hätte das △ EDH einen rechten Winkel r und einen stumpfen o.

§. 43.

Lehrs. Wenn in einem gleichschenklichten Dreiecke ACB eine Gerade aus der Spitze C die Grundlinie AB halbirt, so halbirt sie auch den Winkel an der Spitze, und steht auf der Grundlinie senkrecht; d. i. (Fig. 37.)

wenn AF = FB ist, so

ist 1) $o = r = \frac{1}{2}$ C und

2) $m = n = R$.

Bew. Es ist △ ACF ≌ △ BCF.

Folg. 1) Wenn in einem gleichschenklichten △ eine Gerade CF den Winkel an der Spitze halbirt; so halbirt sie auch die Grundlinie und steht auf dieser senkrecht; d. i.

$$\text{wenn } o = r = \frac{1}{2} C \text{ ist, so}$$

$$\text{ist 1) } AF = BF = \frac{1}{2} AB \text{ und}$$

$$\text{2) } m = n = R.$$

Denn es ist wieder △ ACF $\cong$ △ BCF.

Folg. 2) Wenn in einem gleichschenklichten △ aus der Spitze C die Gerade CF senkrecht auf der Grundlinie steht, so halbirt sie den Winkel an der Spitze und die Grundlinie.

Denn es ist wieder △ ACF $\cong$ △ BCF (§. 40)

Folg. 3) Wenn im gleichschenklichten △ ACB auf die Mitte F der Grundseite eine Senkrechte errichtet wird, so geht sie durch die Spitze C; sonst könnte man durch C und F eine andere Gerade CF ziehen, welche nach §. 43. senkrecht auf AB wäre; es stünden also in einem Punkte F zwei Linien zugleich senkrecht auf AB.

§. 44.

Lehrs. Eine Gerade MN (Fig. 38.) kann einen Kreis nur in zwei Punkten A und B schneiden.

Bew. Fände noch ein dritter Durchschnittspunkt statt, so müßte derselbe entweder zwischen A und B, z. B. in G, oder ausserhalb A und B, z. B. in H statt finden.

Allein weder G noch H können Punkte der Peripherie seyn; denn

da $CA = CB$ ist, so ist
$n = m$.
Nun ist $m < o$, folglich
$n < o$, und daher
im △ CBG $CG < CB$, also CG kein Halbmesser.

Eben so ist $m > p$, daher
$n > p$, folglich
im $\triangle$ CHB $CH > CB$; also CH kein Halbmesser.

B.) Congruenz der Kreise.

§. 45.

Lehrs. Zwei oder mehrere Kreise sind congruent, wenn sie gleiche Halbmesser haben. (Fig. 39.)

Bew. Man lege den einen Kreis auf den anderen, indem man den Punkt c über den Punkt C bringt, so muß jeder Punkt der Peripherie des ersteren Kreises auf einen Punkt der Peripherie des letzteren fallen, weil alle Punkte des einen Kreises eben so weit von c als die des anderen Kreises von C entfernt sind.

Folg. 1) Ein Kreis ist größer, als ein anderer, wenn er mit einem größeren Halbmesser beschrieben ist.

2) Gleiche Kreise haben gleiche Halbmesser, und sind daher auch congruent; sonst müssen sie selbst ungleich seyn. (Folg. 1.)

3) Ein größerer Kreis hat einen größeren Halbmesser; denn hätte der größere Kreis einen kleineren Halbmesser, so müßte er auch zugleich der kleinere Kreis seyn; und wären die Halbmesser gleich, so müßten auch die Kreise gleich seyn.

4) Ein Durchmesser theilt sowohl die Kreislinie, als auch die Kreisebene in zwei congruente Theile.

§. 46.

Lehrs. 1) Wenn man durch eine Gerade CF (Fig. 39.) aus dem Mittelpunkte C eine Sehne AB halbirt, so halbirt CF auch der Centriwinkel C, und steht auf der Sehne senkrecht.

2) Wenn diese Gerade CF einen Centriwinkel halbirt,

so halbirt sie auch die dazu gehörige Sehne AB, und steht auf ihr senkrecht.

3) Steht diese Gerade CF senkrecht auf der Sehne, so halbirt sie diese und den dazu gehörigen Centriwinkel.

4) Eine auf eine Sehne aus ihrer Mitte F errichtete Senkrechte geht durch des Kreises Mittelpunkt.

Bew. Das △ ACB ist gleichschenklicht, folglich gelten hier alle Sätze des §. 43.

§. 47.

Lehrs. In gleichen Kreisen gehören zu gleichen Centriwinkeln ACB und acb (Fig. 39. a und b) congruente, und daher auch gleiche Bögen, Sehnen, Aus- und Abschnitte; d. i.

wenn ACB = acb ist, so ist auch

1) arc. AB = arc. ab.

2) chord. AB = chord. ab,

3) sect. ACB = sect. acb, und

4) segm. AFB = segm. afb.

Bew. Legt man den Kreis um c auf den Kreis um C, indem man c auf C, und ca auf CA legt, so fällt auch cb auf CB, a auf A und b auf B. Eben so muß auch jeder andere Punkt des Bogens ab auf einen Punkt des Bogens AB fallen (§. 45. Folg. 2.) Es decken sich also die Sehnen und die Bögen zwischen A und B, a und b, daher auch die von ihnen und den Schenkeln, der gleichen Centriwinkel begränzten Aus- und Abschnitte.

Folg. 1. Zu gleichen Sehnen AB, ab (Fig. 39.) gehören in gleichen Kreisen gleiche Centriwinkel, Bögen, Aus- und Abschnitte; denn es ist

△ ACB ≌ acb, daher

C = c; folglich

sind auch die übrigen Stücke gleich. (§. 47.)

Folg. 2. Auch in einem und demselben Kreise gehören

zu gleichen Centriwinkeln ACB, GCH (Fig. 39. a) gleiche Sehnen, Bögen, Aus- und Abschnitte; denn wenn man mit dem Halbmesser ca = CA einen anderen Kreis (Fig. 39. b) beschreibt, und an dessen Mittelpunkt einen Winkel acb = ACB = GCH legt, so ist nach §. 47.

arc. AB = arc. ab
arc. GH = arc. ab, folglich

arc. AB = arc. GH; u. s. f. für die übrigen Stücke

Folg. 3. Zu gleichen Sehnen GH, AB (Fig. 39. a) in einem und demselben Kreise gehören auch gleiche Centriwinkel, Bögen, Aus- und Abschnitte; denn es ist

$\triangle$ ACB $\cong$ $\triangle$ GCH; daher
ACB = GCH; folglich sind

auch die übrigen Stücke gleich. (Folg. 2.)

Folg. 4. Wenn die Gerade CE (Fig. 39. a) von C bis zur Peripherie gezogen, den Centriwinkel halbirt, so halbirt sie auch Sehne, Bogen, Aus- und Abschnitt. (Folg. 2.)

Folg. 5. Wenn der Perpendikel CE die Sehne halbirt, so halbirt er auch den Centriwinkel (§. 46), und daher (Folg. 2) auch Bogen, Aus- und Abschnitt.

Folg. 5. Ein Centriwinkel, welcher ein rechter ist, schneidet sowohl von der Kreislinie, als auch von der Kreisfläche den vierten Theil (einen Quadranten) ab.

C) Congruenz der Vielecke.

§. 48.

Die 4 Kriterien der Congruenz.

Zwei geradlinigte Vielecke sind congruent, (Fig. 40. a und b).

1) wenn bis auf ein Paar gleichliegender Seiten AF, af, und ihren anliegenden Winkeln F, f; A, a;

2) wenn bis auf zwei Paar gleichliegender Seiten AF, af; EF, ef, nebst den eingeschlossenen Winkeln F, f;

3) wenn bis auf drei aufeinander folgende gleichliegende Winkel E, e; F, f; A, a;
alle übrigen Seiten und Winkel; und

4) wenn alle Seiten und alle aus zwei gleichliegenden Ecken A, a gezogenen Diagonalen

in beiden Vielecken der Ordnung nach gleich sind.

Bew. für 1) Es läßt sich leicht zeigen, daß unter diesen Bedingungen die Vielecke sich vollkommen decken.

Für 2) Man ziehe die Diagonalen ae, AE so ist Polyg. abcdea $\cong$ Polyg. ABCDEA; (nach No. 1) daher

ae = AE; n = m; o = p.

Es wird $\triangle$ afe $\cong$ $\triangle$ AFE; weil

ae = AE,

def — n (r) = DEF — m (q), und

baf — p (v) = BAF — o (u) ist.

Für 3) Es ist wieder wie in No. 2.)

Polyg. abcdea $\cong$ Polyg. ABCDEA;

daher ae = AF.

Nun ist noch af = AF und ef = EF;

daher $\triangle$ afe $\cong$ $\triangle$ AFE.

Für 4) Zieht man aus a und A so viele Diagonalen, als möglich sind, so erhält man in jeder Figur zwei Dreiecke weniger, als sie Seiten hat. Da nun alle Seiten und Diagonalen in beiden Figuren der Ordnung nach gleich sind, so sind auch alle Dreiecke, und somit die ganzen Figuren congruent.

Folg. 1) Ein Vieleck ist daher bestimmt,

1) wenn außer einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln;

2) wenn außer 2 Seiten und dem eingeschlossenen Winkel;

3) wenn außer 3 aufeinander folgenden Winkeln alle übrigen Seiten und Winkel; und

4) wenn alle Seiten und Diagonalen gegeben sind.

§. 49.

Aufg. Eine geradlinigte Figur zu verzeichnen, welche einer gegebenen (Fig. 40. a) congruent ist.

Aufl. Zur Selbstübung.

Dritter Abschnitt.

Theorie der Parallellinien.

§. 50.

Erklär. 1. Linien in einer Ebene, die nie zusammenstoßen, oder sich schneiden, wie weit man sie auch verlängere, nennt man Parallellinien.

2) Das Zeichen des Parallelisimus ist ‡‡.

3) Wenn zwei Gerade AB und CD (Fig. 41.) von einer dritten EF geschnitten werden, so nennt man paarweise die Winkel m und n, x und y innere, o und s, u und v äußere Wechselwinkel; o und y, n und v, u und m, x und s innere und äußere entgegengesetzte Winkel; n und y, x und m innere, o und v, u und s äußere auf einer Seite liegende Winkel.

§. 51.

Lehrs. Wenn zwei Gerade AB, CD (Fig. 41.) von einer dritten EF so geschnitteu werden, daß zwei innere an einer Seite liegende Winkel gleich zwei rechten sind, so sind jene zwei Geraden parallel; d. i.

wenn $n + y = 2R$

so ist AB ‡‡ CD.

Bew. Die zwei Geraden können nirgends zusammen

laufen, weder auf der Seite von BD, noch auf der Seite von AC, folglich sind sie parallel; denn würden sie auf der einen oder auf der andern Seite zusammen laufen, so entstånde jedesmal ein Dreieck mit zwei rechten Winkeln; indem

1) $n + y = 2R$ ist; (ex hyp.)
da ferner $n + x = 2R$ und eben so
$m + y = 2R$ ist, so wird
$m + y + n + x = 4R$ daher auch
2) $m + x = 2R$.

Folg. 1) Die zwei Geraden AB und CD (Fig. 41.) sind auch parallel, wenn ein äußerer einem inneren entgegengesetzten Winkel gleich ist; d. i.

wenn $o = y$ ist;
denn dann ist $o + n = 2R$;
$o = y$; (ex hyp.) folglich
wieder $n + y = 2R$. (Lehrsatz)

2) Die zwei Geraden sind auch parallel, wenn zwei innere Wechselwinkel gleich sind; d. i.

wenn $x = y$ ist;
denn es ist dann $x + n = 2R$.
$x = y$; (ex hyp)
folglich wieder $n + y = 2R$. (Lehrs.)

3) Die zwei Geraden sind auch parallel, wenn zwei äussere auf einer Seite liegende Winkel zwei rechten gleich sind; d. i. wenn $o + v = 2R$ ist;
denn es ist dann $v + y = 2R$;
folglich $o + v = v + y$ oder
$o = y$. (Folg. 1.)

4) Die zwei Geraden sind auch parallel, wenn zwei äußere Wechselwinkel gleich sind; d. i.

wenn $o = s$ ist;
denn da $o = x$ und
$y = s$ ist, so wird auch
$x = y$. (Folg. 2)

§. 52.

Aufg. Durch einen Punkt G außerhalb einer Geraden CD zu dieser eine Parallele zu ziehen. (Fig. 42.)

Aufl. und Bew. Man ziehe aus einem beliebigen Punkte F dieser Geraden zum Punkte G die Gerade FG, und lege an FG den Winkel AGF gleich dem Winkel GFD, und verlängere AG nach B, so ist AB ‖ CD. (§. 51. Folg. 2.)

§. 53.

Lehrs. Wenn zwei Gerade CD und LM von einer dritten GH geschnitten werden, und die innern auf einer Seite liegenden Winkel kleiner sind, als zwei rechte, so müssen jene zwei Geraden hinlänglich verlängert, auf dieser Seite zusammenstossen. (Fig. 43.)

Bew. Man lege zu CD durch G eine Parallele AB, so ist

$$BGH + GHD = 2R;$$

und $$MGH + GHD < 2R;$$

$$MGH + GHD < BGH + GHD$$

folglich $$MGH < BGH;$$

also liegt GM zwischen BG und GH. Rückt man AB gegen CD, bis G auf H, also AB auf CD fällt, so fällt GM ganz unter CD, und der Punkt M muß schon vorher die CD geschnitten haben; man setze, dieser Durchschnitt habe statt, wenn G in g liegt. Rückt man nun G an seine erste Lage näher, so fällt zwar der Durchschnitt m immer weiter gegen D; aber es läßt sich für keine Lage von G ein letzter angeben; folglich durchschneidet LM auch in der ersten Lage, verlängert die CD auf der nämlichen Seite.

Folg. Wenn zwei Gerade LM, CD von einer dritten geschnitten werden, und die innern auf einer Seite liegenden Winkel $q + r > 2R$ sind, so müssen die zwei Geraden auf der andern Seite zusammenstoßen;

$$\begin{array}{rl} \text{denn es ist} & q + o = 2R; \\ \text{eben so} & \underline{r + p = 2R;} \text{ folglich} \\ & q + o + r + p = 4R; \\ & \underline{q + r > 2R;} \\ \text{folglich} & o + p < 2R. \end{array}$$

Die inneren Winkel mögen demnach größer oder kleiner seyn, als 2R, so können die zwei Geraden in keinem Falle parallel seyn.

*) Dieser Satz ist der eilfte Grundsatz des Euclides. Obgleich man mit Recht Bedenken getragen hat, ihn als einen Grundsatz gelten zu lassen, so hat doch noch Niemand einen rein elementarischen, von dem Begriffe des Unendlichen ganz unabhängigen strengen Beweis davon gegeben.

§. 54.

Lehrs. Wenn zwei Parallellinien AB und CD (Fig. 41.) von einer dritten EF geschnitten werden, so sind jede zwei innere auf einer Seite liegende Winkel zwei rechten gleich; d. i. wenn AB ∦ CD ist, so ist

$$n + y = 2R.$$

Bew. Wäre $n + y < 2R$, so müßten sich die Linien auf der Seite von BD schneiden, (contra hyp.); wäre $n + y > 2R$, so würden sie sich auf der Seite von schneiden; (contra hyp.) (§. 53. Folg.)

Es kann demnach nicht $y + n \gtrless 2R$, folglich muß

$$y + n = 2R \text{ seyn.}$$

Folg. 1) Wenn die zwei Geraden parallel sind, so sind jede zwei innere und äußere entgegengesetzte Winkel gleich; d. i. es ist $o = y$;

$$\begin{array}{rl} \text{denn es ist} & o + n = 2R, \text{ und} \\ & \underline{y + n = 2R;} \text{ (Lehrs.)} \\ \text{folglich} & o + n = y + n, \\ \text{und} & o = y. \end{array}$$

2) Wenn die zwei Geraden parallel sind, so sind jede zwei innere Wechselwinkel gleich; d. i.

es ist $x = y$;

denn es ist $x + n = 2R$, und

$n + y = 2R$; (Lehrs.)

folglich $x = y$.

3) Wenn die zwei Geraden parallel sind, so sind jede zwei äusseren auf einer Seite liegenden Winkel zwey rechten gleich; d. i.

es ist $o + v = 2R$;

denn es ist $o + n = 2R$ und

$y + v = 2R$

folglich $o + n + y + v = 4R$;

nun ist $n + y = 2R$; (ex hyp.)

folglich ist $o + v = 2R$.

4) Wenn die zwei Geraden parallel sind, so sind auch die äußeren Wechselwinkel gleich; d. i.

es ist $o = s$;

denn es ist $o = x$ und

$y = s$,

folglich $o + y = x + s$, und (Folg. 3.)

$o = s$.

§. 55.

Lehrs. Eine Gerade EF, die auf der einen AB von zwei Parallellinien senkrecht steht, steht auch senkrecht auf der anderen CD (Fig. 44.)

Bew. Da AB ‡‡ CD ist (ex hyp.), so folgt

$x + y = 2R$.

Nun ist $x = R$; (ex hyp.)

folglich $y = R$.

Folg. 1) Wenn eine Gerade EF auf zwei anderen Geraden AB und CD senkrecht steht, so sind diese parallel; und umgekehrt, wenn zwei Gerade BE und DF auf einer dritten EF senkrecht stehen, so sind sie parallel.

2) Durch einen Punkt G außerhalb einer Geraden CD (Fig. 45.) gibt es mit dieser nur eine einzige Parallele;

denn zieht man aus G auf ED eine senkrechte Linie GF, so würde diese auf mehreren durch G gezogenen Geraden zugleich senkrecht seyn müssen.

3) Wenn eine Gerade HJ die eine AB von zwei Parallelen schneidet, so muß sie hinlänglich verlängert, auch die andere CD schneiden; sonst wäre auch HJ ‡ CD, und es gebe durch G zwei Parallelen zu CD.

4) Wenn AB ‡ LM und
LM ‡ CD ist, so ist auch
AB ‡ CD; (Fig. 46.)

denn zieht man GH durch AB, so schneidet GH auch LM, und daher auch CD; (Folg. 3.)

da nun $m = n$ und
$n = p$ ist, so ist auch
$m = p$, und daher
AB ‡ CD.

5) Parallelen zwischen Parallelen sind gleich lang; d. i. (Fig. 47.)

wenn AB ‡ CD und LM ‡ NP ist,
so ist $EF = GH$ und $EG = FH$;
denn da $m = n$; $o = p$, und $EH = EH$ ist,
so ist $\triangle EGH \cong \triangle EFH$.

6) Zwischen Parallelen sind alle Perpendikel parallel und gleich; (Fig. 48.)

denn da $x = R = y$ ist,
so ist $x + y = 2R$, folglich
EF ‡ GH;
und auch $EF = GH$; (wegen Folg. 5.)

7) Wenn die Schenkel zweier Winkel BAC, DEF parallel, und nach einerlei Richtung gekehrt sind, so sind die Winkel gleich (Fig. 49.); denn verlängert man den Schenkel DE, bis er AG schneidet, so ist

$DEF = DGC$, und
$DGC = ABC$; folglich
$DEF = ABC$.

Anwendung dieser Theorie auf die Berechnung der Dreiecks- und Vielecks-Winkel.

§. 56.

Lehrs. In jedem Dreiecke, (Fig. 50.) sind alle drei Winkel zusammen zwei Rechten gleich.

Bew. Man ziehe durch einen Winkelpunkt, z. B. durch C zur gegenüberstehenden Seite eine Parallele MN

so ist $m + n + o = 2\,R$;
nun ist $m = p$ u. $o = q$; folglich
$n + p + q = 2\,R$.

Oder auch:

Es ist $p + ACN = 2\,R$ d. i.
$p + n + o = 2\,R$;
nun ist $o = q$; folglich wieder
$p + n + q = 2\,R$.

Folg. 1) Der äussere Winkel CBF in jedem Dreiecke ist den beiden inneren gegenüberstehenden n, p zusammen gleich;

denn $CBF + q = n + p + q = 2\,R$; folglich
$CBF = n + p$.

2) In jedem gleichschenklichten Dreiecke (Fig. 51.) ist der äußere Winkel m an der Spitze doppelt so groß, als jeder Winkel an der Grundlinie;

denn $m = a + b = 2a = 2b$.

3) Im rechtwinklichten Dreiecke sind die beiden spitzigen Winkel einem rechten gleich; und im gleichschenklichten rechtwinklichten Dreiecke ist daher jeder spitzige Winkel $= \frac{1}{2}\,R$.

4) Im gleichseitigen Dreiecke ist jeder Winkel $= \frac{2}{3}\,R$.

5) Man kann aus zwei bekannten Winkeln eines Dreiecks jederzeit den dritten unbekannten finden; denn es

wird $a = 2R - (b + c.)$

$b = 2R - (a + c)$

$c = 2R - (a + b)$.

6) Sind in zwei Dreiecken zwei Winkel gleich, so sind auch die dritten Winkel gleich; daher sind auch zwei Dreiecke congruent, wenn sie eine Seite und zwei Winkel gleich haben, wovon der eine jener Seite anliegt, der andere ihr gegenüberliegt.

§. 57.

Aufg. Am Endepunkte D einer Geraden DE eine Senkrechte zu errichten. (Fig. 52.)

Aufl. Man nehme auf DE einen beliebigen Punkt, z. B. B, errichte über BD ein gleichschenklichtes Dreieck ABD, verlängere AB, bis AC = AB wird, und ziehe CD, so ist diese die Senkrechte.

Bew. Es ist im △ CBD

$$o + r + n + m = 2R;$$

da aber $o = n$ u. $r = m$ ist, so ist auch

$$2o + 2r = 2R, \text{ demnach}$$

$$o + r = CDB = R.$$

§. 58.

In einem geradlinigten Vielecke von n Seiten ist die Summe aller Polygonswinkel

$$S = 2nR - 4R = (2n - 4)R$$

$$= (n - 2) 2R.$$

Bew. Man ziehe von einem beliebigen Punkte innerhalb des Vielecks nach allen Ecken gerade Linien, so erhält man n Dreiecke, deren sämmtliche Winkel = n. 2 R sind; davon müssen aber die Winkel um den angenommenen Punkt, die = 4 R sind, als nicht zu den Polygonswinkeln gehörig, abgezogen werden.

Folg. 1) In Vielecken von gleichviel Seiten ist die Summe aller Polygonswinkel gleich.

2) Wenn in einem Vielecke von n Seiten alle Winkel A, B, C,... bis auf einen X bekannt sind, so wird

$$X = (2n - 4) R - (A + B + C + \ldots)$$

3) In gleichwinklichten und daher auch in regulären Vielecken von n Seiten ist jeder der gleichen Polygonswinkel $P = 2R - \frac{4R}{n}$; z. B.

im regulären Fünfecke: $P = \frac{6}{5} R$;

im regulären Sechsecke: $P = \frac{4}{3} R$, u. s. w.

4) Je mehr ein reguläres Vieleck Seiten hat, desto größer ist jeder Polygonswinkel; aus Folg. 3.

5) In jedem Vierecke ist die Summe der vier Winkel $= 4R$.]

Vierter Abschnitt.

Von Vierecken insbesondere.

---

§. 59.

Erklär. Ein Viereck, in welchem jedes Paar gegenüberstehender Seiten parallel ist, heißt ein Parallelogramm. (Fig. 53.)

Folg. 1) Im Parallelogramme sind

a) jede zwei an einer Seite anliegende Winkel gleich $= 2R$; (§. 54.)

b) jede zwei gegenüberstehende Winkel gleich; denn da $A + B = 2R = B + D$ ist, so folgt $A = D$.

Ebenso wird B = C;

c) jede zwei gegenüberstehende Seiten gleich. (§. 55. Folg. 5.)

Folg. 2) Wenn ein Winkel A ein rechter ist, so sind es die übrigen drei auch; denn es ist

$$A + B = 2 R;$$

wenn nun $A = R$ ist, so folgt auch

$$B = R;$$

und nach Folg. 1) ist $C = B$ und $D = A$.

Folg. 3) Eine Diagonale theilt das Parallelogramm in zwei congruente Dreiecke. (§. 30.)

Folg. 4) Ein Viereck ist ein Parallelogramm,

a) wenn jede zwei gegenüberstehende Seiten gleich sind; denn dann sind dieselben auch parallel.

Es ist nämlich $\triangle ABC \cong \triangle BCD$; (§. 30.)

daher $m = n$; $o = p$; folglich

$AB \,\#\, CD$; $AC \,\#\, BD$;

b) wenn zwei gegenüberstehende Seiten AC, BD gleich und parallel sind; denn dann sind auch die beiden anderen Seiten gleich und parallel.

Es ist nämlich $\triangle ABC \cong \triangle BCD$; (§. 26.)

daher $AB = CD$, und $o = p$;

folglich $AB \,\#\, CD$.

Folg. 5) Durch zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel ist ein Parallelogramm bestimmt.

§. 60.

Aufg. Aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel ein Parallelogramm zu verzeichnen.

Aufl. und Bew. Zur Selbstübung.

§. 61.

Lehrs. Die beiden Diagonalen eines Parallellogramms AC, BD halbiren sich. (Fig. 54.)

Bew. Es ist $\triangle$ BOC $\cong$ AOD; (§. 28.)
daher $CO = AO$; $BO = OD$.

Folg. Jede Gerade FG durch den Durchschnittspunkt der beiden Diagonalen wird in demselben halbirt; denn es ist $x = y$; $m = n$; und $BO = OD$; daher
$\triangle$ BOF $\cong$ $\triangle$ GOD und
$FO = OG$.

§. 62.

Erklär. Ein Viereck heißt ein Trapez, wenn nur ein Paar gegenüberstehender Seiten parallel ist; (Fig. 55) und ein Trapezoid, wenn keine Seite parallel zur anderen ist.

Folg. 1. Im Trapeze ist eine von den beiden parallelen Seiten kleiner, als die andere; denn wären sie gleich, so wäre es kein Trapez, sondern ein Parallelogramm. (§. 59. Folg. 4., b.)

Folg. 2. Im Trapeze ABCD ist

$$o + p > 2\,R \text{ und } m + n < 2\,R;$$

denn man verlängere BC, bis $BF = AD$ wird, und ziehe FD, so ist ABDF ein Parallelogramm; daher

$$m + ADF = 2\,R$$
$$m + n < m + ADF;$$

folglich $m + n < 2\,R$; und dann
$o + p > 2\,R$. (§. 58. Folg. 5.)

Folg. 3. Die beiden nicht parallelen Seiten müssen sich, über die kleinere Parallele hinaus hinlänglich verlängert, schneiden.

§. 63.

Erklär. Ein Parallelogramm heißt

1) ein Quadrat, (Fig. 56.) wenn ein Winkel A ein rechter ist, und die einschließenden Seiten AB und AD gleich sind;
2) ein Rechteck (Rektangel) (Fig. 57.), wenn ein

Winkel A ein rechter ist, und die einschließenden Seiten AB und AD ungleich sind;

3) eine Raute (ein Rhombus) (Fig. 58.), wenn der Winkel A schief ist, und die einschließenden Seiten gleich sind; und

4) ein Rhomboid, (Fig. 59.) wenn der Winkel A schief ist, und die einschließenden Seiten ungleich sind.

Folg. 1) Im Quadrate und im Rechtecke sind alle Winkel rechte. (§. 59. Folg. 2.)

2) Das Quadrat ist eine reguläre Figur.

3) Das Quadrat ist durch eine Seite, das Rechteck durch zwei Seiten, der Rhombus durch einen Winkel und eine Seite, das Rhomboid durch einen Winkel und zwei Seiten vollkommen bestimmt.

§. 64.

Aufg. Auf einer gegebenen Geraden AB ein Quadrat zu verzeichnen.

Aufl. Zur Selbstübung.

Fünfter Abschnitt.

Vom Maße der Winkel und von den Linien an und in dem Kreise.

§. 65.

Einige Aufgaben.

I. Zu einem gegebenen Kreise den Mittelpunkt zu finden. (Fig. 60.)

Aufl. u. Bew. Man nehme in der Peripherie drei beliebige Punkte F, G und H, ziehe die Sehnen FG, GH, und halbire sie durch Senkrechte, so liegt der Mit-

telpunkt in jeder Senkrechten, folglich in ihrem Durchschnittspunkte C. (§. 46. 4; §. 3. Folg. 3.)

Folg. Auf die nämliche Weise findet man auch zu einem Kreisbogen den Mittelpunkt seines Kreises.

II. Einen Kreis zu verzeichnen, dessen Peripherie durch drei gegebene Punkte F, G, H geht, die nicht in einer geraden Linie liegen. (Fig. 60.)

Aufl. u. Bew. Man verbinde die drei Punkte durch zwei Gerade FG und GH, so werden diese Geraden Sehnen des verlangten Kreises seyn; halbirt man also diese Sehnen durch Senkrechte, so erhält man den Mittelpunkt C, und kann daher mit einem Halbmesser = CG = CH = CF den Kreis verzeichnen.

Folg. 1) Durch 3 Punkte, die nicht in einer geraden Linie liegen, ist der Mittelpunkt und Halbmesser eines Kreises, folglich auch der Kreis selbst bestimmt.

2) Zwei Kreise können sich nur in zwei Punkten schneiden.

III. Einen gegebenen Kreisbogen FG zu halbiren. (Fig. 60.)

Aufl. 1) Man suche den Mittelpunkt C seines Kreises, ziehe die Radien CF, CG, und halbire den Centriwinkel FCG.

2) Man ziehe die Sehne FG, und halbire sie durch eine Senkrechte.

Folg. Ein Bogen kann durch n Halbirungen in 2^n gleiche Theile getheilt werden.

§. 66.

Lehrs. In demselben Kreise verhalten sich die Centriwinkel, wie ihre Bögen.

Um diesen Satz zu beweisen, müssen folgende Sätze vorausgeschickt werden:

§. 67.

Lehrs. Zu einem größeren Centriwinkel gehört in gleichen Kreisen auch ein größerer Bogen; d. i. (Fig. 61.)

wenn acb $>$ ACB ist, so ist

arc. ab $>$ Arc. AB.

Bew. Legt man c auf C, und ca auf CA, so fällt a auf A, cb aber über CB hinaus, daher b zwar auf einen Punkt der Peripherie des Kreises um C, jedoch weiter von A hinweg als B; folglich Arc. AB^{I} = arc. ab $>$ Arc. AB.

Folg. Zu gleichen Bögen AB^{I}, ab gleicher Kreise gehören gleiche Centriwinkel.

§. 68.

Lehrs. Zu einem größeren Centriwinkel gehört auch in demselben Kreise ein größerer Bogen; d. i.

wenn $ACB^{I} > FCG$, so ist

Arc. AB^{I} $>$ Arc. FG.

Bew. Man verzeichne einen anderen gleichen Kreis, und mache acb $= ACB^{I}$, so ist auch acb $>$ FCG; daher

arc. ab $>$ Arc. FG;

nun ist arc. ab = Arc. AB^{I}, folglich

Arc. AB^{I} $>$ Arc. FG.

Folg. Zu gleichen Bögen AB, FG eines Kreises gehören gleiche Centriwinkel; und zu ungleichen Bögen auch ungleiche Centriwinkel.

§. 69.

Lehrs. Jede auch noch so kleine endliche Größe a kann durch fortgesetzte Verdopplungen größer, als jede noch so große endliche Größe b werden; und: jede noch so große b kann durch fortgesetzte Halbirungen kleiner, als jede noch so kleine Größe a werden; d. i.

$$1)\ 2^m . a > b, \text{ und } 2)\ \frac{b}{2} < a.$$

Bew. Nach §. 66. Arithm. wird $2^m > m$; folglich auch $2^m . a > a . m$.

Wie groß nun auch b, und wie klein auch a seyn mag, so läßt sich doch immer eine ganze positive Zahl m finden, die so groß ist, daß a. m $>$ b wird.

Man hat also 1) $2^m . a > a . m$ und

$$\frac{a . m > b\text{; folglich}}{2^m . a > b\text{; und}}$$

$$2)\ \frac{2^m . a}{2^m} > \frac{b}{2^m} \text{ oder } a > \frac{b}{2^m}.$$

Bew. für §. 66. Man denke sich zwei Kreisbögen desselben Kreises B und b, und $B > b$; W sey der zu B, w der zu b gehörige Centriwinkel, und es sey noch a ein sehr kleiner Bogen.

Nach §. 69. wird $\frac{B}{2^m} < a$ und $\frac{b}{2^m} < a$.

Nimmt man nun m und n sehr groß, und a sehr klein, so wird endlich

$$\frac{B}{2^m} - \frac{b}{2^n} = o, \text{ oder } \frac{B}{2^m} = \frac{b}{2^n}.$$

Denkt man sich nun nach allen Theilungspunkten der Bögen B und b Radien gezogen, so wird W auch in m, und w in n Theile getheilt, und es ist

$$\frac{W}{2^m} = \frac{w}{2^n}. \text{ (§. 68. Folg.)}$$

$$\text{Folglich } \frac{B}{2^m} : \frac{b}{2^n} = \frac{W}{2^m} : \frac{w}{2^n} \text{ oder}$$

$$B : b = W : w.$$

Folg. 1) Bögen ungleicher Kreise zwischen den Schenkeln gleicher Centriwinkel haben ein gleiches Verhältniß zu ihren Quadranten, und daher zu ihren ganzen Kreisen.

Es sey C ein Kreis, W ein Centriwinkel in demselben, und B dessen Bogen; für einen kleineren Kreis c habe man b und w; so ist sowohl der Centriwinkel von $\frac{1}{4}$ C, als auch von $\frac{1}{4}$ c ein rechter, und es ist

$$W : R = B : \tfrac{1}{4} C, \text{ und}$$

$$\frac{W : R = b : \tfrac{1}{4} c,}{\text{folglich } B : \tfrac{1}{4} C = b : \tfrac{1}{4} c, \text{ und}}$$

$$B : C = b : c.$$

Folg. 2) Durch das Verhältniß eines Bogens zu dem Quadranten seines Kreises ist auch das Verhältniß seines Centriwinkels zum Rechten bestimmt, ohne daß es dabei auf die Größe des Kreises ankömmt. (Folg. 1.) Da nun einen Winkel messen, sein Verhältniß zum Rechten angeben heißt, so kann man auch sagen: „der Centriwinkel wird durch seinen Bogen gemessen.“

§. 70.

Erklär. Um das Verhältniß der Kreisbögen zur Peripherie zu bestimmen, theilt man diese in 360 Grade ein; die Grade wieder in Minuten, u. s. w.

*) Mehreres über diese Eintheilung mündlich.

Folg. 1) Ein Halbkreis hat 180°, ein Quadrant 90°, ein Sextant 60°.

Folg. 2) Der Centriwinkel hat so viele Grade, Minuten, u. s. w., als sein Bogen. (§. 69. Folg. 2.)

Folg. 3) Der rechte Winkel hat 90°; also $R = 90°$.

*) Einrichtung und Gebrauch des Transporteurs.

§. 71.

Erklär. Bögen ungleicher Kreise, welche zu gleichen Centriwinkeln gehören, heißen ähnliche Bögen.

Folg. Aehnliche Bögen haben gleich viele Grade.

§. 72.

Lehrs. Die Sehne AB eines Sextanten ist dem Halbmesser gleich. (Fig. 62.)

Bew. Ist der Bogen AB ein Sextant, oder $= 60°$, so ist auch $C = 60°$; mithin $A + B = 120$; und (wegen $AC = CB$) $A = B = 60°$; folglich das $\triangle ACB$ gleichwinklicht, daher auch gleichseitig, und $AB = AC = BC$.

Folg. 1) Der Bogen einer Sehne, welche dem Halbmesser gleich ist, ist ein Sextant.

Folg. 2) Der Radius läßt sich sechsmal an der Peripherie auftragen.

§. 73.

Lehrs. Ein Centriwinkel ist doppelt so groß, als ein Peripheriewinkel auf demselben Bogen desselben Kreises; d. i. ACB = 2 ADB.

Bew. Der Mittelpunkt kann 1) in einem Schenkel, 2) zwischen und 3) außer den Schenkeln des Peripheriewinkels liegen.

1) (Fig. 63.) Es ist ACB = 2 ADB.

2) (Fig. 64.) Zieht man den Diameter DE,

so ist $m = 2n$; $o = 2p$; folglich

$m + o = 2(n + p)$ oder

ACB = 2 ADB.

3) (Fig. 65.) Zieht man den Diameter DE,

so ist $m + n = 2(o + r)$

$m = 2r$;

folglich $n = 2o$; d. i. ACB = 2 ADB.

Folg. 1) Der Peripheriewinkel hat seinen halben Bogen zum Maße.

2) Ein Centriwinkel ist doppelt so groß als ein Peripheriewinkel, wenn beide in gleichen Kreisen auf gleichen Bögen stehen.

3) Peripheriewinkel auf gleichen Bögen sind gleich.

4) Gleiche Peripheriewinkel stehen auf gleichen Bögen.

5) Jeder Peripheriewinkel auf einem Halbkreise ist = R.

6) Ein Peripheriewinkel ist spitzig oder stumpf, je nachdem sein Bogen kleiner oder größer ist, als ein Halbkreis.

7) In einem Vierecke, dessen Ecken sich alle an der Peripherie befinden, ist jedes Paar entgegengesetzter Winkel = 2 R.

8) Wenn zwei Sehnen eines Kreises parallel sind, so sind die zwischen ihnen enthaltenen Bögen gleich; und umgekehrt. (Folg. 3. und 4.)

Zur Uebung. Die Aufgabe des §. 57. nach Folg. 5. aufzulösen.

Von Tangenten und Sekanten.

§. 74.

Erklär. Eine Gerade DB, welche mit einer Kreislinie nur einen Punkt A gemein hat, und sonst ganz außerhalb des Kreises liegt, heißt eine Tangens; (Fig. 66.) eine Gerade LM aber, die zum Theil innerhalb, zum Theil außerhalb eines Kreises liegt, also den Kreis schneidet, heißt Sekans.

§. 75.

Lehrs. Eine senkrechte BD auf einem Halbmesser CA durch dessen Endepunkt A, ist eine Tangens. (Fig. 66.)

Bew. Man nehme in BD einen beliebigen Punkt E außer A, und ziehe CE, so ist CE > CA; also liegt E, und so auch jeder andere Punkt der Linie BD, A ausgenommen, außerhalb des Kreises. (§. 74.)

§. 76.

Lehrs. Eine Gerade AM, welche am Endepunkt A eines Halbmessers einen schiefen Winkel macht, ist eine Sekans. (Fig. 66.)

Bew. Man ziehe auf AM eine Senkrechte CF, so ist CA > CF, also liegt F innerhalb des Kreises, folglich nach §. 15. Folg. 2.

Folg. 1) Eine Tangens steht am Berührungspunkte auf dem Halbmesser senkrecht.

2) Um durch einen Punkt A einer Kreislinie eine Tangens zu ziehen, ziehe man den Halbmesser CA, und errichte auf ihm durch A eine Senkrechte AB. (§. 57.)

3) Für jeden Punkt der Peripherie gibt es nur eine Tangens. (§. 38.)

4) Wenn man auf eine Tangens BD im Berührungspunkte A eine Senkrechte AC errichtet, so geht diese durch den Mittelpunkt.

5) Eine aus dem Mittelpunkte eines Kreises zum Berührungspunkte A einer Tangens gezogene Gerade steht auf letzterer senkrecht.

6) Zwischen der Tangens und dem Bogen läßt sich durch den Berührungspunkt A keine Gerade mehr ziehen; denn sie würde mit dem Halbmesser einen schiefen Winkel bilden, daher den Kreis schneiden.

§. 77.

Lehrs. Der Winkel zweier Sekanten innerhalb eines Kreises ist der Summe, und außerhalb des Kreises der Differenz der beiden Peripheriewinkel gleich, welche auf den durch seine Schenkel abgeschnittenen Bögen stehen.

Bew. (Fig. 67.) Man ziehe AE, so ist $ECB = m + n$; und (Fig. 68.) $ECB = m - n$.

§. 78.

Lehrs. Von den beiden Nebenwinkeln, welche eine Tangens BD mit einer Sehne AE macht, ist jeder dem Peripheriewinkel gleich, der auf dem zwischen seinen Schenkeln enthaltenen Bogen steht; d. i. (Fig. 69.)

$$1)\ DAE = m;$$

$$\text{und } 2)\ BAE = q.$$

Bew. Man ziehe den Durchmesser AF, und die Sehne EF, und zu einem beliebigen Punkte G des Bogens AE die Sehnen AG, GE; so ist $n = R$;

$$\text{folglich auch } m + p = R;$$

$$\text{nun ist } \underline{DAE + p = R;}$$

$$\text{daher } DAE = m.$$

Ferner ist $m + q = 2R$; (§. 73. Folg. 7.)

$$BAE + EAD = 2R;$$

folglich $\overline{BAE + EAD} = m + q$,

und $BAE = q$.

§. 79.

Aufg. Zu einem Kreise von einem Punkte G außerhalb desselben zwei Tangenten zu ziehen. (Fig. 70.)

Aufl. Man ziehe die Gerade GC, durch A eine Senkrechte auf GC, beschreibe aus C mit CG einen Kreis, welcher die Senkrechte in zwei Punkten M und N schneidet, ziehe CM und CN, und zu den Durchschnittspunkten D und E die Geraden GD und GE, so sind diese die verlangten Tangenten.

Bew. Es ist $\triangle DGC \cong \triangle MAC$; (§. 26.)
daher $GDC = MAC = R$. (§. 74.)
Eben so ist $\triangle CEG \cong \triangle NAC$;
daher $CEG = NAC = R$.

Folg. Es ist $DG = GE$; weil
$\triangle CDG \cong \triangle CEG$ (§. 26.) ist.

Sechster Abschnitt.

Von der Aehnlichkeit der Figuren und den Proportionen bei denselben.

§. 80.

Lehrs. Wenn man auf einem Schenkel AF des Winkels A eine beliebige Anzahl gleicher Theile aufträgt, so theilen die durch die Theilungspunkte, B, C..... gezogenen Parallelen den anderen Schenkel AL in eben so viele gleiche Theile. (Fig. 71.)

Bew. Da man offenbar durch B eine Linie ziehen

kann, welche AL in G schneidet, so wird AL auch alle durch C, D ... gezogene Parallelen in H, J ... schneiden.

Durch G, H, I .... ziehe man mit AF die Parallelen GM, HN ...., so ist

$$GM = BC = AB;\ M = C = B;\ o = p;$$

folglich △ GMH ≅ △ ABG; und daher

$$GH = AG.$$

Auf eine ähnliche Art wird auch

△ HNI ≅ △ ABG, und

$$HI = AG = GH;$$ u. s. w.

Folg. AB ist ein aliquoter Theil von AF und AG von AL. Ist nun $AB = \frac{1}{m}.\ AF$, so ist auch $AG = \frac{1}{m}.AL.$

Nun ist $\frac{1}{m}.\ AF : \frac{1}{m}.\ AL = AF : AL,$

folglich auch $AB : AG = AF : AL.$

*) Nicht mit den Linien als Linien, wohl aber mit den Zahlen, wodurch ihre Größe bestimmt ist, können alle Operationen der Arithmetik vorgenommen werden.

**) Alle für Zahlen geltende Proportionsgesetze gelten daher auch für Linien.

§. 81.

Lehrs. Wenn in einem Dreiecke ABC (Fig. 72.) zu einer Seite BC die Parallele DE gezogen wird, d. i. wenn

BC ‡‡ DE ist, so ist

1) $AD : AB = AE : AC;$

2) $AB : DB = AC : EC;$

3) $AD : DB = AE : EC;$

4) $AD : AB = DE : BC;$

5) $AE : AC = DE : BC.$

Bew. 1. Folgt aus §. 80. Folg.

2) Nach No. 1 ist $AD : AB = AE : AC$

oder $AB : AC = AD : AE$: (Arith. §. 21. VI.)

daher $AB - AD : AC - AE = AB : AC$; (Ar. §. 21. VIII.)

BD : EC = AB : AC, oder
AB : BD = AC : EC.

3) Aus No. 1) und 2). (Ar. §. 23. II.)

4) Man ziehe durch D mit AC die Parallele DF, so ist DE = FC, und

AB : AD = BC : FC; (No. 2) oder
AD : AB = DE : BC.

5) Aus No. 1) und 4).

§. 82.

Lehrs. Wenn im △ ABC (Fig. 72.)

1) AD : AB = AE : AC

oder 2) AD : DB = AE : EC ist, so

ist DE ⧺ BC.

Bew. 1) Wäre nicht DE ⧺ BC, so könnte man durch D eine Parallele De zu BC ziehen, welche entweder über oder unter DE fallen würde. Dann wäre

AD : AB = Ae : AC; (§. 81. No. 1.)
es ist AD : AB = AE : AC; (ex hyp.)
daher Ae : AC = AE : AC,
und Ae = AE, was unmöglich ist.

2) Wenn AD : DB = AE : EC ist, so ist auch
AD + DB : AE + CE = AD : AE, d. i.
AB : AC = AD : AE;
also DE ⧺ BC. (No. 1.)

§. 83.

Erklär. Räumliche Größen heißen ähnlich, wenn sie einerlei Qualität, Form oder Gestalt haben; d. h. wenn sie aus gleichvielen auf einerlei Weise mit einander verbundenen gleichen Theilen bestehen, ohne daß jedoch die Theile der einen den Theilen der anderen gleich sind.

§. 84.

Lehrs. Zwei ebene geradlinigte Figuren sind ähnlich, wenn in beiden

1) die Anzahl der Seiten gleich ist;

2) die Winkel der Ordnung nach gleich sind, und

3) jedes Paar homologer Seiten (§. 25. 2) proportionirt ist.

Bew. Nach §. 83.

Folg. 1. Zwei Figuren, die einer dritten ähnlich sind, sind auch unter sich ähnlich. Denn wenn sie mit einer dritten gleich viele proportionirte Seiten und gleiche Winkel haben, so haben sie dieselben auch unter sich.

Folg. 2. Reguläre Figuren von gleich vielen Seiten sind ähnlich.

§. 85.

Lehrs. Wenn man in einem Dreiecke zu einer Seite eine Parallele zieht, so ist das abgeschnittene Dreieck dem ganzen ähnlich; d. i. (Fig. 73.)

wenn DE ♯ BC ist,

so ist $\triangle$ ABC $\backsim$ $\triangle$ ADE.

Bew. 1) Die Anzahl der Seiten ist gleich;

2) die Winkel sind auch gleich; denn es ist A = A; m = n, o = p; und

3) die homologen Seiten sind einander proportionirt; denn es ist: AD : AE = AB : AC,

AD : DE = AB : BC,

AE : ED = AC : CB. (§. 81.)

§. 86.

Erklär. Die Bestimmungen, unter welchen Dreiecke ähnlich sind, werden die Kriterien ihrer Aehnlichkeit genannt.

*) Man darf nur, um die Kriterien der Aehnlichkeit zu erhalten, in den Kriterien der Congruenz proportionirte Seiten, anstatt gleicher Seiten setzen.

§. 87.

Erstes Kriterium.

Lehrs. Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn zwei Winkel des einen zweien Winkeln des anderen gleich sind; d. i. (Fig. 74.)

wenn A = a, und B = b ist,

so ist △ ABC ∽ △ abc.

Bew. Man nehme AD = ab und ziehe DE parallel mit BC, so ist

1) △ ABC ∽ △ ADE und nach §. 28.

2) △ ADE ≌ △ abc (weil m = B = b)

folglich △ ABC ∽ △ abc. (§. 84. Folg. 1.)

Folg. Zwei rechtwinklichte Dreiecke sind ähnlich, wenn ein schiefer Winkel in beiden gleich ist.

§. 88.

Zweites Kriterium.

Lehrs. Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie einen Winkel gleich haben, und wenn die denselben einschließenden Seiten in Proportion stehen;

d. i. wenn A = a und AB : AC = ab : ac ist,

so ist △ ABC ∽ △ abc. (Fig. 74.)

Bew. Man nehme AD = ab und AE = ac,

so ist AB : AC = AD : AE,

folglich wird DE ‡ BC; (§. 82.) daher

△ ADE ∽ △ ABC. Es ist aber (§. 26.)

△ ADE ≌ △ abc; (weil A = a)

folglich △ ABC ∽ △ abc.

§. 89.

Drittes Kriterium.

Lehrsatz. Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn die drei Seiten des einen den drei Seiten des anderen proportionirt sind; d. i.

wenn AB : AC = ab : ac
AB : BC = ab : bc und
AC : CB = ac : cb ist, so ist
△ ABC ∽ △ abc. (Fig. 74.)

Bew. Man nehme AD = ab, und AE = ac, und ziehe DE, so ist

AB : AC = AD : AE, folglich
DE ‡ BC, und

1) △ ABC ∽ △ ADE.

Ferner ist AD : DE = AB : BC (§. 81.)
und AB : BC = ab : bc (ex hyp.)
folglich AD : DE = ab : bc,
und DE = bc; daher nach §. 30.
2) △ ADE ≌ △ abc

Aus (1) und (2) wird △ ABC ∽ △ abc.

§. 90.

Viertes Kriterium.

Lehrs. Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn zwei Seiten des einen zweien Seiten des anderen proportionirt, und die den größeren Seiten gegenüberstehenden Winkel gleich sind; d. i. (Fig. 75.)
wenn AB : AC = ab : ac und p = c ist,
so ist △ ABC ∽ △ abc.

Bew. Man nehme AD = ab, AE = ac, und ziehe DE, so ist

AB : AC = AD : AE, daher
DE ‡ BC, und

1) △ ADE ∽ △ ABC. Ferner ist

2) △ ADE ≌ △ abc, (§. 40.)

indem c = p = o und
AD > AE ist, weil auch ab > ac (ex hyp.) ist.

Aus (1) und (2) folgt △ ABC ∽ △ abc.

§. 91.

Lehrs. I. Eine Gerade ED, welche einen Winkel E des Dreiecks AEB halbirt, theilt die gegenüberstehende Seite AB so, daß die Abschnitte derselben mit den übrigen beiden Seiten des Dreiecks in Proportion stehen, d. i.

wenn $o = r$ ist, so ist

$AD : DB = AE : EB$. (Fig. 76.)

Bew. Man verlängere AE über E hinaus, mache $EC = BE$, und ziehe BC, so ist

$o + r = 2o = 2m$; daher

$o = m$; folglich

DE ⧺ BC; und

$AD : DB = AE : EC$ (EB). (§. 81.)

II. Und umgekehrt: wenn die aus E gezogene Gerade DE, die gegenüberliegende Seite AB so theilt, daß

$AD : DB = AE : EB$ ist, so ist

$o = r$, d. h. DE halbirt dann den Winkel E.

Bew. Es ist DE ⧺ BC; (ex hyp.) daher

$o = m$;

$2o = 2m$;

ferner ist $o + r = 2m$; (ex constr.)

folglich $o = r$.

§. 92.

Einige Aufgaben.

I. Eine Gerade in eine beliebige Anzahl gleicher Theile, z. B. in 5 Theile zu theilen.

Aufl. Nach §. 80.

II. Eine Gerade AC so zu theilen, daß sich die Theile wie gegebene gerade Linien verhalten. (Fig. 77.)

Aufl. Man verzeichne einen beliebigen Winkel, und trage auf dem einen Schenkel CB die gegebenen Linien der Ordnung nach nebeneinander auf, auf den anderen Schenkel trage man die gegebene CA auf, ziehe BA, und durch D

und E Parallelen mit BA, so verhalten sich die Theile CG, GF, FA wie CD, DE, EB.

Bew. Aus §. 81.

III. Zu drei gegebenen geraden Linien die vierte geometrische Proportionallinie zu finden.

Aufl. Nach §. 81.

IV. Zu zwei gegebenen geraden Linien die dritte geometrische Proportionallinie zu finden.

Aufl. Nach §. 81.

§. 93.

Lehrs. Wenn man aus dem rechten Winkel B eines rechtwinklichten Dreiecks auf die Hypotenuse eine Senkrechte BD zieht, so ist (Fig. 78.)

$$\triangle ABD \backsim \triangle ABC \backsim \triangle BDC.$$

Bew. 1) Es ist $A = A$ und $m = ABC = R$; daher $\triangle ABD \backsim \triangle ABC$;

2) Es ist $C = C$; und $n = ABC = R$; daher $\triangle BDC \backsim \triangle ABC$; daher auch

3) $\triangle ABD \backsim \triangle BDC$. (§. 84. (Folg. 1.)

Folg. 1) Diese Senkrechte BD ist die mittlere geometrische Proportionallinie zwischen den Abschnitten der Hypotenuse; d. i.

$$AD : BD : DC.$$

2) Wird die Senkrechte BD gezogen, so ist jede Kathete die mittlere Proportionallinie zwischen der ganzen Hypotenuse und dem an jener Kathete anliegenden Abschnitte derselben; d. i.

$$AC : AB : AD, \text{ und}$$
$$AC : BC : DC.$$

3) Eine Senkrechte BD, auf den Durchmesser eines Halbkreises von einem beliebigen Punkte B der Peripherie gezogen, oder in einem beliebigen Punkte D des Durchmessers errichtet, und bis an die Peripherie verlängert,

ist die mittlere Proportionallinie zwischen den Abschnitten des Durchmessers; oder es ist (Fig. 79.)

$$AD : BD : DE;$$ denn

zieht man AB und BE, so ist ABE = R.

Mit Hilfe dieses Satzes kann die Aufgabe gelöst werden: zu zwei gegebenen Geraden die mittlere Proportionallinie zu finden.

4) Bestimmt man die Größe der Seiten und Abschnitte eines rechtwinklichten Dreiecks (Fig. 78.) in Zahlen, so ist die Quadratzahl der Hypotenuse der Summe der Quadratzahlen der beiden Katheten gleich, d. i.

$$AC^2 = AB^2 + BC;$$

denn aus Folg. 2. folgt

$$(AB)^2 = AC.\ AD \text{ und}$$
$$(BC)^2 = AC.\ CD,$$

$$\text{daher } (AB)^2 + (BC)^2 = AC\,(AD + CD)$$
$$= (AC)^2.$$

*) Der rein geometrische Beweis dieses Lehrsatzes (des pythagoräischen) wird später gegeben werden.

Folg. 5) Daher wird

$$(AB)^2 = (AC)^2 - (BC)^2 \text{ und}$$
$$(BC)^2 = (AC)^2 - (AB)^2.$$

Mit Hilfe der Folg. 4. und 5. des §. 93. lassen sich folgende zwei Aufgaben lösen.

§. 94.

Aufg. Aus dem Halbmesser CA und einer gegebenen Sehne AB deren Entfernung CD vom Mittelpunkte des Kreises zu finden. (Fig. 80.)

Aufl. u. Bew. Da CD senkrecht auf AB steht, so ist $AD = \frac{1}{2} AB$. (§. 43. Folg. 2.)

Man hat also $CD = \sqrt{(AC^2 - AD^2)}$ oder kürzer

$$d = \sqrt{(r^2 - \tfrac{1}{4} c^2)}.$$

Folg. 1) Gleiche Sehnen sind gleichweit vom Mittelpunkte entfernt; denn für die eine Sehne wird

$d = \sqrt{(r^2 - \frac{1}{4} c^2)}$; und für die andere
$d^1 = \sqrt{(r^2 - \frac{1}{4} c^{1\,2})}$.

Ist nun $c = c^1$, so wird auch
$d = d^1$.
Und umgekehrt,
wenn $d = d^1$ ist, so wird
$c = c^1$.

Folg. 2) Die größere Sehne ist nicht so weit vom Mittelpunkte entfernt, als die kleinere; und die dem Mittelpunkte näher liegende Sehne ist größer, als die entferntere; denn
wenn $c > c^1$ ist, so wird
$d < d^1$, und umgekehrt.

Folg. 3) Die größte Sehne geht durch den Mittelpunkt, und ist also ein Durchmesser; denn für $d = o$, wird $c = 2\,r$.

§. 95.

Aufg. Aus dem Halbmesser AC und der Sehne AB = C des ganzen Bogens AEB die Sehne AE des halben Bogens zu finden. (Fig. 80.)

Aufl. Man ziehe senkrecht auf AB den Halbmesser CE, so halbirt dieser die Sehne (§. 43. Folg. 2.) und den Bogen (§. 47. Folg. 5.), und AE ist die Sehne des halben Bogens.

Nun ist $DE = CE - CD = r - \sqrt{(r^2 - \frac{1}{4} c^2)}$ (§. 94.)
folglich $AE = \sqrt{(AD^2 + DE^2)}$

Setzt man für AD und DE die Werthe, und vollzieht die Rechnung, so wird

$$AE = \sqrt{\left\{ 2\,r^2 - 2\,r \sqrt{(r^2 - \tfrac{1}{4} c^2)} \right\}}$$

Folg. Setzt man $c = r$, so wird

$$AE = \sqrt{r^2 (2 - \sqrt{3})}$$
$$= r.\ o,5177 \ldots$$

§. 96.

Lehrs. Wenn aus zwei Punkten B und E in der Peripherie zwei Gerade gezogen werden, die sich in einem Punkte C schneiden, so sind die von den Peripherien bis zum Durchschnittspunkte C abgeschnittenen Stücke umgekehrt proportionirt; d. i.

EC : BC = AC : CF.

Bew. 1) (Fig. 67.) Man ziehe EA und BF,
so ist △ ACE ∽ △ BCF,
weil o = p, und m = r ist. (§. 73. Folg. 3.)

2) (Fig. 68.) Auch hier ist △ ACE ∽ △ BCF;
weil C = C, und n = p ist.

3) (Fig. 81.) △ ACE ∽ △ BCF; denn
C = C; und m = AEC. (§. 78.)

Folg. In Fig. 81. ist EC und FC eine einzige Linie, nämlich die Tangens EC; die Tangens ist also die mittlere Proportionallinie zwischen der ganzen Sekans BC, und dem Stücke AC derselben ausserhalb des Kreises.

§. 97.

Aufg. Eine Gerade AB in media et extrema ratione, d. h. so zu theilen, daß der größere Theil die mittlere Proportionallinie zwischen der ganzen Linie, und dem kleineren Theile ist. (Fig. 82.)

Aufl. An dem Endepunkte A errichte man eine Senkrechte AC = $\frac{1}{2}$ AB, beschreibe aus C mit AC einen Kreis, ziehe BC, und nehme BE = BM, so ist

AB : BE : AE.

Bew. Man verlängere BC bis G, so ist

BG : AB : BM; (§. 96. Folg.)
BG — AB : AB — BM = AB : BM; oder
BG — GM : AB — BE = AB : BE,
BE : AE = AB : BE, oder
AE : BE : AB.

*) Etwas über die geometrische Construktion algebraischer Ausdrücke.

§. 98.

Lehrs. In ähnlichen Dreiecken (Fig. 83., 84.) verhalten sich jede zwei homologe Grundseiten, wie die Höhen; d. i.

$$AC : ac = BD : bd.$$

Bew. Es ist $\triangle CBD \sim \triangle cbd$, (§. 84. u. §. 87.)
daher $BC : BD = bc : bd$;
dann $BC : AC = bc : ac$; (ex hyp.)
folglich $AC : BD = ac : bd$.

§. 99.

Lehrs. Aehnliche Figuren werden durch gleichliegende Diagonalen in lauter ähnliche Dreiecke getheilt. (Fig. 85.)

Bew. Es ist 1) $\triangle ABC \sim \triangle abc$; (ex hyp.) (§. 88.)
daher $ACB = acb$, und
$C - ACB = c - acb$, d. i.
$ACD = acd$;
dann ist $AC : BC = ac : bc$, $BC : CD = bc : cd$, (ex hyp.)
folglich $AC : CD = ac : cd$, und
$\triangle ACD \sim \triangle acd$; u. s. w.

§. 100.

Lehrs. In ähnlichen Figuren verhalten sich die Perimeter, wie jedes Paar homologer Seiten oder Diagonalen. (Fig. 85.)

Bew. Es ist $AB : ab = BC : bc = CD : cd$ u. s. w.
daher $(AB + BC + \ldots) : (ab + bc + \ldots)$
d. i. $Per. : per. = AB : ab$
$= BC : bc$, u. s. w.
Da nun $AB : ab = AC : ac$, (§. 99.)
$= AD : ad$ ist, u. s. w.
so wird auch $Per. : per. = AC : ac$
$AD : ad$ u. s. w.

Siebenter Abschnitt.

Die Kreismessung.

§. 101.

Erklär. Eine Figur heißt in den Kreis eingeschrieben, oder vom Kreise umschrieben, wenn alle ihre Seiten Sehnen dieses Kreises sind; sind dagegen alle Seiten einer Figur Tangenten eines Kreises, so heißt die Figur um den Kreis beschrieben, und der Kreis in die Figur eingeschrieben.

§. 102.

Aufg. Um ein Dreieck ABD einen Kreis zu beschreiben. (Fig. 86.)

Aufl. u. Bew. Man beschreibe einen Kreis, der durch die drei Winkelpunkte A, B und D geht, so ist jede Seite des Dreiecks eine Sehne dieses Kreises; folglich (§. 101.)

Folg. Jede auf der Mitte einer Seite des Dreiecks errichtete Senkrechte geht durch den Mittelpunkt des umschriebenen Kreises; alle drei schneiden sich also in einem Punkte.

§. 103.

Aufg. In ein Dreieck ABD einen Kreis einzuschreiben. (Fig. 87.)

Aufl. Man halbire zwei an einer Seite anliegende Winkel B und D durch die Geraden BC und DC, fälle aus ihrem Durchschnittspunkte C eine Senkrechte CG auf eine Seite BD, und beschreibe mit CG aus C einen Kreis.

Bew. Da $B + D < 2R$ ist, so ist auch

$o + m < 2R$; daher BC und DC

sich schneiden müssen.

Zieht man nun aus C auf AB und AD die Senkrechten CE und CF, so wird

$$\begin{array}{rl} & \triangle BCE \cong \triangle BCG \\ \text{und} & \triangle CDF \cong \triangle CDG; \end{array} \Bigg\} \text{ §. 40.}$$

$$\begin{array}{rl} \text{daher } EC = CG \text{ und} \\ CG = CF; \end{array}$$

also ist EC sowohl, als auch CF, eben so wie CG ein Halbmesser, und alle drei Seiten des Dreiecks stehen auf den Endpunkten der Halbmesser senkrecht, sind also Tangenten. (§. 101.)

Folg. 1. Wenn alle drei Winkel eines Dreiecks durch Gerade halbirt werden, so schneiden sie sich im Mittelpunkte des eingeschriebenen Kreises, also in einem Punkte.

Folg. 2. Jede Grade, von einer Winkelspitze eines Dreiecks zum Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises gezogen, halbirt den Winkel.

§. 104.

Aufg. Die Peripherie zu theilen

1) in vier gleiche Theile.

Aufl. u. Bew. Man ziehe einen Durchmesser, und auf ihn durch seinen Mittelpunkt senkrecht einen anderen Durchmesser. (§. 47. Folg. 5.)

2) In sechs gleiche Theile.

Aufl. u. Bew. Nach §. 72. Folg. 2.

Folg. Ist der Kreis in mehrere gleiche Theile getheilt, so kann man die Anzahl derselben, durch Halbirung der gleichen Bögen, so oft man will, verdoppeln. Auf diese Weise kann man den in vier gleiche Theile getheilten Kreis in 8, 16, 32..., und den in sechs gleiche Theile getheilten Kreis in 12, 24, 48.... gleiche Theile theilen.

§. 105.

Lehrs. Wenn die Peripherie in n gleiche Bogen getheilt wird, und zu jedem eine Sehne gezogen wird, so erhält man ein in den Kreis eingeschriebenes reguläres n Eck. (Fig. 88.)

Bew. Aus §. 15., Nro. 6. §. 73. Folg. 3.

§. 106.

Lehrs. Wenn die Peripherie in n gleiche Theile getheilt wird, und durch alle Theilungspunkte Tangenten gezogen werden, so erhält man ein um den Kreis beschriebenes reguläres n Eck. (Fig. 88.)

Bew. 1) Die Tangenten schneiden sich paarweise; denn zieht man zu allen Theilungspunkten Radien, so nach §. 55. Folg. 8.

2) Zieht man die Sehnen AB, BC..., so erhält man ein in den Kreis eingeschriebenes reguläres n Eck (§. 105.); also AB = BC....

3) Alle Winkel MAB, MBA, NBD, NDB..., welche die Tangenten mit den Sehnen bilden, sind gleich. (§. 78.)

4) Daher sind die Dreiecke AMB, BND ... gleichschenklicht und congruent; daher

5) AMB = BND = DOE . . . und

6) MB + BN = ND + DO . . .; d. i.

MN = NO . . .

Das umschriebene n Eck ist also (Nro. 5. und 6.) regulär.

§. 107.

Lehrs. Wenn man in einer regulären Figur (Fig. 89.) zwei an einer Seite anliegende Winkel A und B durch gerade Linien halbirt, so werden sich diese in einem Punkte O schneiden, welcher

I.) von allen Winkelspitzen, und

II.) von allen Seiten der Figur gleich weit entfernt ist, und daher der Mittelpunkt der Figur genannt wird.

Bew. 1) Da A < 2 R, und B < 2 R, so ist

m + n < 2 R, und

AO und BO müssen sich schneiden.

2) Es ist AO = BO. (§. 29.)

3) $\triangle AOB \cong \triangle BOC$; (§. 26.) daher
$CO = AO = BO$; dann ist
$o = p$, und
$p = r$; daher auch
4) $\triangle BOC \cong \triangle COD$; daher
(I) $DO = BO = CO = AO$; u. s. f.

5) Man ziehe aus O auf jede Seite eine Senkrechte, so ist

$\triangle BOG \cong \triangle BOH$; (§. 40. Folg. 2.)
daher (II) $OG = OH$; u. s. f.

§. 108.

Aufg. I.) Um jedes reguläre Vieleck, und
II.) in jedes reguläre Vieleck einen Kreis zu beschreiben.

Aufl. Nach §. 107.

Folg. 1) Wenn man aus dem Mittelpunkt O eines regulären n Ecks (Fig. 89.) an alle Ecke gerade Linien zieht, so wird dasselbe in n congruente gleichschenklichte Dreiecke getheilt, und jeder Polygonswinkel wird halbirt.

Folg. 2) Alle Winkel am Mittelpunkte eines regulären n Ecks sind gleich, und jeder $= \frac{4\,R}{n}$.

Folg. 3) Der Umfang eines in den Kreis eingeschriebenen Vielecks ist kleiner, als die Peripherie des Kreises. (§. 4.)

§. 109.

Lehrs. Jeder Kreis ist einem in denselben eingeschriebenen regulären Vielecke von unendlich vielen und unendlich kleinen Seiten gleich.

Bew. 1) Die doppelte Sehne des halben Bogens ist weniger vom ganzen Bogen unterschieden, als die Sehne des ganzen Bogens von diesem selbst; denn (Fig. 90.) wenn man den Bogen AB halbirt, so ist

ch. AE = ch. BE; (§. 26.) und
2. ch. AE > ch. AB; (§. 16. Folg. 2.)
also arc. AB — 2. ch. AE < arc. AB — ch. AB.

2) Dieser Unterschied wird durch wiederholte Halbirungen der Sehnen und Bögen immer kleiner. Je mehr Seiten nun das eingeschriebene Vieleck erhält, desto kleiner werden dieselben; und je kleiner dieselben werden, desto kleiner wird der Unterschied zwischen den Seiten (Sehnen) und den dazu gehörigen Bögen, folglich auch zwischen der Summe der Seiten und Bögen, d. i. zwischen dem Perimeter des Vielecks und der Peripherie des umschriebenen Kreises.

3) Der Abstand dieser immer mehr verkleinerten Sehnen vom Mittelpunkt des Kreises nähert sich immer mehr dem Halbmesser. (§. 93. Folg. 2.)

4) Durch fortgesetzte Verdopplung der Seitenzahl des Vielecks kann man sich immer mehr einem Vielecke von unendlich vielen und unendlich kleinen Seiten nähern.

5) Der Perimeter eines solchen Vielecks ist daher unendlich wenig von der Peripherie verschieden, und überall vom Mittelpnnkt um den Halbmesser entfernt;

6) also fällt er überall mit dem Kreise selbst zusammen.

Folg. Alle Kreise sind einander ähnlich. (§. 84. Folg. 1.)

§. 110.

Lehrs. Die Perimeter regulärer Figuren von gleich vielen Seiten verhalten sich wie die Halbmesser oder Durchmesser der um sie beschriebenen Kreise. (Fig. 91.)

Bew. Solche Figuren sind ähnlich; (§. 84. Folg. 1.)
daher Per. : per. = AB : ab;

und weil △ AOB ∽ △ aob ist, (§. 87.) so
wird AO : ao = AB : ab, folglich
Per. : per. = AO : ao = 2 AO : 2 ao;
= R : r = D : d.

Folg. Die Peripherien der Kreise verhalten sich wie ihre Halb- oder Durchmesser; und dieses Verhältniß ist für alle Kreise einerlei.

§. 111.

Lehrs. Das Verhältniß des Durchmessers zur Peripherie ist beinahe

1 : 3, 141529653 ....

Bew. Man setze den Halbmesser = 1, so ist der Perimeter des eingeschriebenen regulären Sechseckes = 6, und jede Seite desselben = 1. Die Seite des eingeschriebenen Zwölfeckes wird (nach §. 95.) = 0,517638, und der Perimeter 6,211656; u. s. f.

Endlich findet man den Perimeter des 768 Eckes = 6, 2830; dieser Perimeter aber kömmt der Peripherie des umschriebenen Kreises ziemlich nahe, (§. 109.) daher verhält sich der Halbmesser zur Peripherie (§. 110. Folg.) beynahe wie 1 : 6, 2830, oder der Durchmesser zur Peripherie, wie 1 : 3, 1415.

*) Einige geschichtliche Notizen.

**) Die Zahl 3, 1415 . . . heißt die Ludolphische Zahl, und wird mit π bezeichnet.

Folg. 1) Man findet daher die Peripherie eines Kreises, wenn der Durchmesser oder Halbmesser desselben gegeben ist, aus der Formel

$$P = D . \pi = 2 R . \pi.$$

Achter Abschnitt.

Von der Gleichheit und Verwandlung der Figuren.

§. 112.

Lehrs. Wenn man in einem Parallelogramme (Fig. 92.) die Diagonale BD, und durch einen beliebigen Punkt E

derselben zwei Linien FG und HI parallel zu den Seiten AD und AB zieht; so entstehen vier Parallelogramme, von welchen jene zwei, durch welche die Diagonale nicht geht, gleich sind.

Bew. Weil FG $\#$ AD und
BC $\#$ AD ist, so ist auch
FG $\#$ BC. (§. 55. Folg. 4.)
Eben so, weil HI $\#$ AB und
CD $\#$ AB ist, wird auch
HI $\#$ CD;
folglich sind AE, EC, FH und IG Parallelogramme. (§. 59.)
Nun ist $\triangle$ ABD $\cong$ $\triangle$ BCD; (§. 59. Folg. 3.)
$\triangle$ EDJ $\cong$ $\triangle$ EDG;
$\triangle$ BEF $\cong$ $\triangle$ BEH; folglich
$\triangle$ ABD $-$ $\triangle$ EDJ $-$ $\triangle$ BEF $=$ $\triangle$ BCD
$-$ $\triangle$ EDG $-$ $\triangle$ BEH;
d. i. Par. AE $=$ Par. EC.

Die beiden Parallelogramme AE und EC nennt man die Ergänzungen an der Diagonale.

Folg. 1) Im Quadrate (Fig. 92.) sind die beiden Parallelogramme FH und GJ Quadrate auf den Seiten FE $=$ AJ, und DJ; denn
es ist m $=$ n $=$ R; und im gleichschenklichen
$\triangle$ BAD ist o $=$ p;
ferner q $=$ p; (§. 54. Folg. 1.)
folglich o $=$ q und daher
EJ $=$ JD;
mithin ist GJ ein Quadrat mit der Seite JD. (§. 63. Folg. 3.) Eben so für das Quadrat FH.

Dagegen sind die beiden Ergänzungen AE, EC an der Diagonale Rechtecke, jedes mit einer Seite AJ, und einer anderen JD; denn

A $=$ C $=$ R; (§. 63. No. 2.)

dann ist im ersteren Rechtecke die eine Seite AJ, die

andere EJ = JD; in dem letzteren die eine Seite CG = BF = AJ, die andere HC = JD.

Folg. 2. Wenn man mit der Linie AD = AJ + JD ein Quadrat AC (Fig. 92.) verzeichnet, so besteht solches aus den Quadraten von AJ und JD, und aus zwei Rechtecken, von welchen ebenfalls AJ und JD die Seiten sind (Folg. 1.)

§. 113.

Erklär. 1) Nimmt man eine Seite eines Parallelogrammes als Grundseite an, so heißt die Senkrechte, welche von der gegenüberstehenden Seite auf die Grundseite, oder deren Verlängerung gezogen wird, die Höhe des Parallelogrammes.

2) Parallelogramme liegen zwischen Parallelen, wenn ihre Grundseiten in der einen, und die denselben gegenüberstehenden Seiten in der anderen Parallele liegen.

3) Dreiecke liegen zwischen Parallelen, wenn ihre Grundseiten in der einen, und ihre Spitzen in der anderen Parallele liegen.

Folg. Parallelogramme und Dreiecke zwischen denselben Parallelen haben gleiche Höhe; denn zwischen Parallelen sind alle Perpendikel gleich.

§. 114.

Lehrs. Parallelogramme auf derselben Grundseite AB und zwischen denselben Parallelen sind gleich.

Bew. Die Seite EF des Parallelogramms AF kann folgende drei Lagen haben:

Der Punkt E fällt

1) entweder auf C; (Fig. 93.) oder
2) ausserhalb C; (Fig. 94.) oder
3) zwischen C und D. (Fig. 95.)

1) Hier ist $\triangle ACD \cong \triangle BFC$, (§. 30.)

und $\triangle ABC = \triangle ABC$;

$\triangle ACD + \triangle ABC = \triangle BFC + \triangle ABC$;

d. i. Par. AC = Par. AF.

2) Hier ist DC = AB = EF, und

CE = CE,

daher DC + CE = EF + CE, d. i.

DE = CF;

und $\triangle DAE \cong \triangle CBF$; (§. 30.) daher

$\triangle DAE - \triangle CEG + \triangle AGB = \triangle CBF - \triangle CEG + \triangle AGB$;

d. i. Par. AC = Par. AF.

3) Hier ist DC — EC = EF — EC, d. i.

DE = EC, und

$\triangle ADE \cong \triangle CBF$; (§. 30.) daher

$\triangle ADE$ + Trap. AECB = $\triangle CBF$ + Trap. AECB;

d. i. Par. AC = Par. AF.

Folg. Parallelogramme AD, FG auf gleichen Grundseiten AB, HG und zwischen denselben Parallelen sind gleich; denn zieht man AE und BF, so ist EF = GH = AB, daher ABEF ein Parallelogramm. (§. 59. Folg. 4. b.)

Nun ist AD = AF, und AF = FG; } (§. 114.)

folglich AD = FG.

§. 115.

Lehrs. Parallelogramme von gleichen Grundseiten und Höhen sind gleich; d. i.

wenn (Fig. 96.) AB = LO und DR = MP ist, so

ist Par. AD = Par. LN.

Bew. Man verlängere AB und CD, nehme GH = LO m = n, verzeichne (§. 60.) das Parallelogramm GF, so wird ES = DR; (§. 113. Folg.) folglich ES = MP.

Es wird aber $\triangle EGS \cong \triangle MLP$;

daher GE = LM.

Dadurch wird Par. FG = Par. LN; (§. 59. Folg. 5.)
dann ist Par. FG = Par. AD;
folglich Par. AD = Par. LN.

§. 116.

Lehrs. Jedes Dreieck ABC (Fig. 97.) ist die Hälfte eines Parallelogramms MN, welches mit ihm gleiche Grundseite und Höhe hat.

Bew. Man ergänze das △ ACB zu einem Parallelogramme AD; (§. 60.)

so ist △ ACB ≌ △ BCD,

△ ACB = $\frac{1}{2}$ Par. AD

$\frac{1}{2}$ Par. AD = $\frac{1}{2}$ Par. MN; (§. 115.)

△ ACB = $\frac{1}{2}$ Par. MN.

Folg. 1. Dreiecke von gleichen Grundseiten und Höhen sind gleich.

2) Mehrere Dreiecke ABC, DEF, GHJ (Fig. 98.) von gleicher Höhe AK sind zusammen einem einzigen Dreiecke AKJ gleich, welches dieselbe Höhe hat, und dessen Grundseite AJ die Summe der Grundseiten aller gegebenen Dreiecke ist; denn man nehme auf einer Geraden AC = AC, CF = DF, und FJ = GJ, errichte an A die senkrechte AK, und ziehe KC, KF und KJ, so haben die Dreiecke AKC, CKF, FKJ gleiche Grundseiten und Höhe (§. 42. Folg. 1.) mit den gegebenen Dreiecken, sind also der Ordnung nach ihnen gleich; daher

△ ABC + △ DFF + △ GKJ = △ AKC
+ △ CKF + △ FKJ
= △ AKJ.

§. 117.

Pythagoräischer Lehrsatz.

Das Quadrat auf der Hypotenuse eines rechtwinklichten Dreiecks ist den Quadraten auf den beiden Katheten zusammengenommen gleich; d. i. (Fig. 99.)

wenn BAC = R ist, so ist

$(BC)^q = (BA)^q + (AC)^q$.

Bew. Man verzeichne auf BC, AC und AB Quadrate, ziehe aus A auf die Hypotenuse die senkrechte AO, und verlängere dieselbe bis E, (§. 55. Folg. 3.) so ist OE ‡ BF ‡ CD, (§. 51. und §. 51. Folg. 1.) und OF und OD sind Parallelogramme.

Zieht man noch AD und BG, so ist

$m = n$ (ex hyp.)

$r = r$;

folglich $m + r = n + r$; d. i.

DCA = BCG; und da noch

AC = CG und BC = CD ist,

so wird △DCA ≌ △ BCG. (§. 26.)

Ferner ist △ CDA = $\frac{1}{2}$ CE, und △ BCG = $\frac{1}{2}$ CM, } (§. 116.)

folglich $\frac{1}{2}$ CE = $\frac{1}{2}$ CM und

CE = CM.

Zieht man AF und CL, so wird auf die nämliche Art

BE = AL; demnach

BE + CE = AL + CM, d. i.

$(BC)^q = (AB)^q + (AC)^q$.

Folg. 1. Mit Hilfe dieses Satzes läßt sich die Aufgabe lösen: „Aus zwei gegebenen Seiten eines rechtwinklichten Dreiecks die dritte (durch Rechnung) zu finden."

Es wird nämlich

die Hypotenuse $h = \sqrt{(a^2 + b^2)}$;

die eine Kathete $a = \sqrt{(h^2 - b^2)}$, und

die andere .... $b = \sqrt{(h^2 - a^2)}$,

wenn man h, a und b mit einerlei Maß mißt, und dadurch in Zahlen bestimmt. Im rechtwinklichen gleichschenklichten Dreiecke wird

$h = a \sqrt{2}$

$= b \sqrt{2}$.

§. 118.

Lehrs. Wenn in einem Dreiecke ABC (Fig. 100.) das Quadrat einer Seite AC den Quadraten der beiden anderen Seiten AB und BC zusammengenommen gleich ist, so ist das Dreieck rechtwinklicht; d. i.

wenn $(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$ ist, so ist
$ABC = R.$

Bew. Man errichte auf BC im Punkte B die Senkrechte $BD = AB$, und ziehe DC, so ist $\triangle$ BCD rechtwinklicht, daher

$(DC)^2 = (BC)^2 + (BD)^2$; (§. 117.)
oder $= (BC)^2 + (AB)^2$; folglich
$(DC)^2 = (AC)^2$); (ex hyp.) und
$DC = AC.$

Daher wird $\triangle ABC \cong \triangle BCD$; (§. 30.)
und $ABC = ABD = R.$

Neunter Abschnitt.

Von der Ausmessung, Verwandlung und Theilung der Figuren.

§. 119.

Lehrs. Wenn die Seite ad des Quadrats ac (Fig. 101.) in der Seite AB des Rechtecks AC m mal, und in der Seite AD n mal enthalten ist, so ist das Quadrat im ganzen Rechtecke so oft enthalten, als 1 im Produkte m . n, d. h. m . n mal.

Bew. Wenn ab in AB m mal enthalten ist, so läßt sich das Quadrat auf AB m mal nebeneinander legen, mithin ist

Rectang. AM = m . ac.

Dieses Rechteck AM läßt sich so oft an AD legen, als die Seite ab oder ad in AD enthalten ist, folglich wird

Rectang. AC = n. Rectang. AM

$= n \,.\, m \,.\, ac.$ oder

$ac : AC = 1 : mn.$

§. 120.

Erklär. 1) Eine ebene Figur messen, heißt ihren Flächeninhalt bestimmen; d. i. die Zahl angeben, wie oft das gebrauchte Maß in der Figur enthalten ist.

2) Die Größen, womit ebene Flächen gemessen werden sollen, müssen mit diesen gleichartig, und daher selbst Flächen von bestimmter Größe seyn. Man nimmt dazu Quadrate, in welchen jede Seite einem bekannten Längenmaße gleich ist.

Daher heißt den Flächeninhalt einer Figur angeben, auch die Figur quadriren.

3) Zur Grundeinheit des Flächenmaßes nimmt man den Quadratfuß, ein Quadrat, an welchem jede Seite einen Fuß lang ist.

§. 121.

Lehrs. Der Flächeninhalt eines Rechteckes wird erhalten, wenn man die Zahlen multiplizirt, welche man erhält, wenn man zwei aneinander anliegende Seiten (Grundseite und Höhe) mit einerlei Maß mißt; oder Rect. $=$ B. A.

Bew. Im §. 118. ist Rect. $= m \,.\, n \,.\, ac.$

Ist nun ac (Fig. 110.) die Einheit des gebrauchten Maßes, (§. 120. No. 3.) so wird

Rect. $= m \,.\, n.$

Nun sind m und n die Zahlen, welche man erhält, wenn man Grundseite und Höhe mit einer Seite von ac, d. i. mit einerlei Maße mißt. Bezeichnet man dieselben mit B und A, so wird

Rect. $=$ B. A.

Folg. Der Flächeninhalt eines Quadrates ist

$$Q = A^2;$$

wenn A eine Seite desselben bezeichnet.

§. 122.

Aufg. Ein jedes Parallelogramm zu messen.

Aufl. Man multiplizire die Zahlen, welche man erhält, wenn man Grundseite und Höhe mit einerlei Maße mißt; oder es ist

$$\text{Par.} = \text{B} . \text{A}.$$

Bew. Es ist B . A = Rect. (B. A.) (§. 121.)
nun ist Rect. (B . A) = Par. (B . A.); (§. 115. Folg.)
also Par. (B . A.) = B . A.

Folg. 1) Parallelogramme stehen im zusammengesetzten Verhältnisse ihrer Grundseiten und Höhen;
denn es ist Par. = B . A und
par. = b . a, folglich
Par. : par. = B . A : b . a.

2) Parallelogramme verhalten sich bei gleichen Grundseiten, wie ihre Höhen, und bei gleichen Höhen, wie ihre Grundseiten; denn dann wird aus Folg. 1

Par. : par. = A : a und
Par. : par. = B : b.

3) Wenn zwei Parallelogramme gleich sind, so sind ihre Grundseiten und Höhen umgekehrt proportionirt; denn aus

Par. : par. = B : A : b . a
wird B . A = b . a; folglich
B : b = a : A.

4) Wenn die Grundseiten und Höhen zweier Parallelogramme umgekehrt proportionirt sind; so sind diese gleich; denn aus

B : b = a : A wird dann
B . A = b . a. Da nun
Par. : par. = BA : ba ist,
so wird Par. = par.

§. 123.

Aufg. Ein Dreieck zu messen.

Aufl. Man messe Grundseite und Höhe mit einerlei Maße, und theile das Produkt dieser Zahlen mit 2; d. i.

$$\triangle = \frac{B\,.\,A}{2} = \frac{B}{2}\,.\,A = B\,.\,\frac{A}{2}.$$

Bew. $\triangle\,(B\,.\,A) = \frac{1}{2}\,\text{Par.}\,(B\,.\,A.)$

$\frac{1}{2}\,\text{Par.}\,(B\,.\,A) = \frac{1}{2}\,(B\,.\,A),$ (§. 122.)

folglich $\triangle\,.\,(B\,.\,A) = \frac{B\,.\,A}{2}.$

Folg. 1) Zwei Dreiecke stehen im zusammengesetzten Verhältnisse ihrer Grundseiten und Höhen; verhalten sich bei gleichen Grundseiten wie ihre Höhen, und bei gleichen Höhen, wie ihre Grundseiten. (§. 122. Folg. 1.2.)

Folg. 2) Wenn zwei Dreiecke gleich sind, so sind ihre Höhen und Grundseiten umgekehrt proportionirt; und umgekehrt.

Folg. 3. Auch ist $\frac{2\,.\,\triangle}{A} = B$, und

$$\frac{2\,.\,\triangle}{B} = A.$$

§. 124.

Aufg. Ein Trapez zu messen (Fig. 102.)

Aufl. Man messe die beiden parallelen Seiten AB, und CD, und ihren Abstand CE mit einerlei Maße, multiplizire die Summe der beiden ersten Zahlen mit der letzten, und dividire das Produkt mit 2; d. i.

$$\text{Trap.} = \frac{(B + b).\,A}{2}.$$

Bew. Man ziehe die Diagonale BC und die Senkrechte CE, so ist diese die gemeinschaftliche Höhe für $\triangle$ CBD und ACB. Nun ist

$$\triangle\,ACB = AB.\,\tfrac{1}{2}\,CE = B.\,\tfrac{1}{2}\,A \text{ und}$$
$$\triangle\,CBD = CD.\,\tfrac{1}{2}\,CE = b.\,\tfrac{1}{2}\,A, \text{ also}$$
$$\text{Trap.} = B.\,\tfrac{1}{2}\,A + b.\,\tfrac{1}{2}\,A$$
$$= \frac{(B + b).\,A}{2}.$$

§. 125.

Aufg. Eine jede geradlinigte Figur, wenn sie kein Dreieck ist, zu messen.

Aufl. I. Man theile die Figur durch Diagonalen in Dreiecke, und bestimme nach §. 123. den Inhalt eines jeden einzelnen Dreiecks.

II. Man theile die Figur in Trapezen; indem man innerhalb oder außerhalb der Figur (Fig. 103. und 104.) eine Gerade zieht, und auf diese aus allen Ecken der Figur Senkrechte errichtet. Die beiden Dreiecke ABb und FGf können auch als Trapeze betrachtet werden, in denen die kleinere Parallele = o ist. Nun berechne man nach §. 124. den Flächeninhalt aller einzelnen Trapeze.

§. 126.

Lehrs. Wenn zwei Parallelogramme oder Dreiecke gleich sind, und einen gleichen Winkel M = m haben, so sind die denselben einschließenden Seiten umgekehrt proportionirt. (Fig. 105.)

Bew. Es ist

$\triangle MCD \backsim \triangle mcd$; (§. 87.) daher

$MC : mc = Dc : dc$

$DC : dc = me : ME$, (§. 122. Folg. 3.) folglich

$MC : mc = me : ME$.

Folg. Und wenn zwei Parallelogramme oder Dreiecke einen Winkel gleich haben, und die denselben einschließenden Seiten umgekehrt proportionirt sind, so sind die Parallelogramme oder Dreiecke gleich.

§. 127.

Lehrs. Aehnliche Dreiecke verhalten sich, wie die Quadrate gleichliegender Seiten oder Höhen; d. i. (Fig. 83.)

$$\triangle ABC : \triangle abc = AB^2 : ab^2,$$
$$= CD^2 : cd^2.$$

Bew. Es ist

$$\triangle ABC : \triangle abc = AB \,.\, CD : ab \,.\, cd; \text{ (§. 123. Folg. 1.)}$$

$$AB : ab = CD : cd, \text{ daher}$$

$$CD = \frac{AB.\ cd}{ab}; \text{ folglich}$$

$$\triangle ABC : \triangle abc = AB.\ \frac{AB.\ cd}{ab} : ab.\ cd; \text{ d. i.}$$

$$\triangle ABC : \triangle abc = AB^2 : ab^2; \text{ und}$$

$$\triangle ABC : \triangle abc = CD^2 : cd^2.$$

§. 128.

Lehrs. Aehnliche geradlinigte Figuren verhalten sich, wie die Quadrate homologer Seiten oder Diagonalen; d. i. (Fig. 85.)

$$\text{Polyg.} : \text{polyg.} = AB^2 : ab^2$$
$$= AC^2 : ac^2.$$

Bew. Man theile die Figuren durch gleichliegende Diagonalen in Dreiecke, so sind diese der Ordnung nach ähnlich; also ist

$$\left.\begin{aligned} \triangle ABC : \triangle abc &= AB^2 : ab^2 \\ &= AC^2 : ac \end{aligned}\right\} \text{§. 127.}$$

$$\triangle ACD : \triangle acd = AC^2 : ac^2, \text{ folglich auch}$$
$$= AB^2 : ab^2; \text{ u. s. w.}$$

Die Summe aller Dreiecke aber gibt die Figuren selbst; daher

$$\text{Polyg.} : \text{polyg.} = AB^2 : ab^2,$$
$$= AC^2 : ac^2.$$

§. 129.

Lehrs. Reguläre Figuren von gleich viel Seiten verhalten sich, wie die Quadrate der Halbmesser der um sie beschriebenen Kreise. (Fig. 106.)

Bew. Solche Figuren sind ähnlich; daher ist

$$\text{Pol.} : \text{pol.} = AB^2 : ab^2; \text{ ferner}$$

ist $\triangle AOB \backsim \triangle aob$, daher

$$\frac{AO^2 : ao^2 = AB^2 : ab^2;\text{ folglich}}{\text{Pol.} : \text{pol.} = AO^2 : ao^2.}$$

Folg. Daher verhalten sich zwei Kreise, als reguläre Figuren von unendlich vielen, und also von gleich vielen Seiten, wie die Quadrate ihrer Halb- oder Durchmesser.

§. 130.

Lehrs. Der Flächeninhalt eines jeden regulären Vielecks ist dem Flächeninhalt eines Dreiecks gleich, welches zur Grundseite die Summe aller Seiten des Vielecks und zur Höhe die Entfernung einer Seite vom Mittelpunkte hat.

Bew. Alle jene Dreiecke, in welche das Vieleck durch die aus dem Mittelpunkte nach allen Winkelpunkten gezogenen Linien getheilt wird, haben gleiche Höhe; (§. 107.) folglich nach §. 116. Folg. 2.

Folg. Der Flächeninhalt eines jeden Kreises, als eines regulären Vielecks von unendlich vielen und unendlich kleinen Seiten ist einem Dreiecke gleich, das den Halbmesser zur Höhe und die Peripherie zur Grundseite hat.

§. 131.

Aufg. Den Flächeninhalt eines Kreises aus D oder R zu berechnen.

Aufl. $\text{Circ.} = p. \frac{1}{2} R$; (§. 130.)

$$= R^2. \pi = \frac{D^2}{4}. \pi = D^2. \frac{\pi}{4}.$$

Folg. 1) Auch hat man

$$D = 2 \sqrt{\frac{\text{Circ.}}{\pi}}.$$

2) Der zwischen zwei Kreisen enthaltene Ring ist $= (R + r) (R - r). \pi.$

§. 132.

Aufg. Aus R und der Anzahl n der Grade eines Bogens die Länge a desselben zu finden.

Aufl. Es ist $n^\circ : 360^\circ = a : p$
$= a : 2 R \pi$; folglich

$$a = \frac{n. R. \pi}{180^\circ}.$$

Folg. Der Flächeninhalt eines Kreisausschnittes ist $=$ Arc. $\frac{1}{2}$ R, wenn Arc. die Länge seines Bogens bezeichnet; denn, wenn n die Anzahl der Grade seines Centriwinkels ist, so hat man

$$\text{Sect.} : C = n^\circ : 360^\circ, \text{ oder}$$

$$\text{Sect.} = \frac{R^2 . \pi . n^\circ}{360}$$

$$= \frac{\text{Arc. R}}{2}. \text{ (§. 132.)}$$

Daher wird der Flächeninhalt eines Kreisabschnittes, oder Segm. $=$ Sect. ACB $-$ $\triangle$ ACB. (Fig. 107.)

§. 133.

Erklär. Eine Figur in eine andere verwandeln, heißt eine andere Figur verzeichnen, welche mit der gegebenen denselben Flächeninhalt hat.

§. 134.

Einige Aufgaben über die Verwandlung der Figuren.

I. Ein Parallelogramm DE in ein anderes mit gegebenen Winkel zu verwandeln.

Aufl. (Fig. 108.) Man verzeichne den gegebenen Winkel EAF an EA, verlängere AF, bis zum Durchschnitte mit DB oder deren Verlängerung, (§. 55. Folg. 3.) ziehe durch E die EM $\#$ AF, welche von der gleichfalls verlängerten DB in M geschnitten wird, so ist FE das verlangte Parallelogramm, und FE $=$ DE.

Folg. Ist der gegebene Winkel ein rechter, so wird FE ein Rechteck. Man kann also jedes schiefe Parallelogramm in ein Rechteck verwandeln.

II. Ein Parallelogramm BE in ein anderes mit gegebener Seite MN zu verwandeln.

Aufl. (Fig. 109.) Man verlängere eine beliebige Seite BG des Parallelogramms BE, mache die Verlängerung CG = MN, und ziehe durch C und E eine Gerade bis an die Verlängerung von BJ; (§. 55. Folg. 3.) aus AB, BC und B verzeichne man das Parallelogramm BD, verlängere GE bis F, und JE bis H, so ist DE das verlangte Parallelogramm, und BE = DE.

Bew. Zur Selbstübung.

Folg. Wenn das gegebene Parallelogramm ein Rechteck, so ist auch das verwandelte ein Rechteck.

III. Ein Parallelogramm in ein anderes mit gegebenem Winkel und gegebener Seite zu verwandeln.

Aufl. Nach Nro. I. und II.

Folg. Jedes schiefe Parallelogramm kann daher in ein Rechteck mit gegebener Seite verwandelt werden.

IV. Ein Dreieck ADB (Fig. 110.) in ein anderes mit einem gegebenen Winkel BAC zu verwandeln.

Aufl. Man verzeichne BAC an AB, ziehe durch D eine Parallele DC mit AB, verlängere AC bis zu dieser Parallele, und ziehe BC, so ist △ ADB = △ ABC.

V. Ein Dreieck ABD in ein anderes mit gegebener Seite MN verwandeln. (Fig. 111.)

Aufl. Man verlängere BD und AD über D hinaus, mache DC = MN, ziehe BC, und durch A die AE ∦ BC bis zum Durchschnitte mit der Verlängerung von BD, so ist △ ADB = △ CDE.

VI. Ein Dreieck in ein anderes mit gegebenem Winkel und gegebener Seite zu verwandeln.

Aufl. Nach Nro. IV. und V.

VII. Ein Dreieck ABC in ein Parallelogramm mit einem gegebenen Winkel zu verwandeln. (Fig. 112.)

Aufl. Man halbire AC in D, lege an DC den gegebenen Winkel CDE, ziehe durch B eine Parallele zu AC

und durch C eine Parallele zu DE, so ist $\triangle$ ABC = Par. DF.

Folg. Ist der gegebene Winkel ein rechter, so erhält man ein Rechteck; jedes Dreieck kann daher in ein Rechteck verwandelt werden.

VIII. Ein Dreieck in ein Parallelogramm mit gegebenem Winkel und gegebener Seite zu verwandeln.

Aufl. Nach Nro. VII. und II.

Folg. Jedes Dreieck läßt sich in ein Rechteck mit bestimmter Seite verwandeln.

IX. Ein Parallelogramm DF in ein Dreieck mit einem gegebenen Winkel D zu verwandeln. (Fig. 113.)

Aufl. Man verlängere eine Seite CD, mache CA = CD, und ziehe AE, so ist

$$\triangle \text{ ADE} = \text{Par. DF.}$$

X. Ein Parallelogramm in ein Dreieck mit gegebenem Winkel und gegebener Seite zu verwandeln.

Aufl. Nach Nro. IX. und VI.

XI. Ein Trapez ABCD in ein Parallelogramm zu verwandeln. (Fig. 114.)

Aufl. Man halbire eine der nicht parallelen Seiten, z. B. CD, ziehe durch deren Mitte FG $\#$ AB bis an die Verlängerung von BC, so ist Par. AG = Trap. ABCD;

$$\text{denn } \triangle \text{ FED} \cong \triangle \text{ CEG. (§. 28.)}$$

XII. Ein Rechteck AC in ein Quadrat zu verwandeln. (Fig. 115.)

Aufl. An die Seite AB setze man die andere Seite des Rechtecks, so daß BD = BC ist, halbire dann AD, und beschreibe mit $\frac{1}{2}$ AD aus der Mitte E einen Halbkreis, und verlängere BC bis zur Peripherie, so ist $BF^2 = AB.\ BD = AB.\ BC$, d. h. das Quadrat mit der Seite BF ist das verlangte.

*) Einige Bemerkungen über die Quadratur des Kreises.

XIII. Ein Quadrat zu verzeichnen, welches mehreren gegebenen Quadraten zusammengenommen gleich ist. (Fig. 116.)

Aufl. Es seyen AB, CD, EF... Seiten der gegebenen Quadrate; man verzeichne nun einen rechten Winkel, und mache den einen Schenkel desselben = AB, und den anderen = CD; ziehe BD, so ist

$$1)\ (BD)^q = (AB)^q + (CD)^q.$$

Aus BD und der Seite EF des dritten Quadrats bilde man wieder einen rechten Winkel, und ziehe DF, so ist

$$2)\ (DF)^q = (BD)^q + (EF)^q$$
$$= (AB)^q + (CD)^q + (EF)^q,$$

u. s. w.

XIV. Ein gegebenes Quadrat AC zu verdoppeln. (Fig. 117.)

Aufl. Man ziehe eine Diagonale BD, und verzeichne mit ihr ein Quadrat, so ist

$$(BD)^q = (AB)^q + (AD)^q$$
$$= 2\ (AB)^q$$

Oder auch durch Rechnung:

Ist a die Zahl, welche man erhält, wenn man eine Seite des gegebenen Quadrats mit einem bestimmten Maße mißt, so ist die Zahl x der Seite des gesuchten Quadrats in dem nämlichen Maße

$$x = a\sqrt{2}.$$

XV. Ein Quadrat zu halbiren, so daß dessen Hälfte wieder ein Quadrat ist. (Fig. 117.)

Aufl. Man ziehe die Diagonalen AC und BD, so ist AE = CE = BE = DE die Seite eines halb so großen Quadrats.

Bew. Zur Selbstübung.

§. 135.

Einige Aufgaben über die Theilung der Figuren.

I. Ein Dreieck in eine gegebene Anzahl (n) gleicher Dreiecke zu theilen.

Aufl. Man theile eine beliebige Dreiecksseite in n

gleiche Theile, und ziehe von den Theilungspunkten gerade Linien zum gegenüberstehenden Winkel, so entstehen n Dreiecke, und diese sind alle einander gleich.

II. Ein Parallelogramme in n gleiche Parallelogramme zu theilen.

Aufl. Man theile eine beliebige Seite in n Theile, und ziehe durch die Theilungspunkte Parallelen mit einer anliegenden Seite, so entstehen n gleiche Parallelogramme.

III. Ein Dreieck ABC oder ein Parallelogramm AM in mehrere Dreiecke oder Parallelogramme zu theilen, die ein bestimmtes Verhältniß zu einander haben. (Fig. 118. 119.)

Aufl. Man theile die Grundseite nach dem gegebenen Verhältnisse, z. B. von AD zu DE zu EB, und verfahre dann wie in Nro. I. und II.

Zweite Abtheilung.

Die Stereometrie.

Zweite Abtheilung.

Die Stereometrie.

Erster Abschnitt.

Von der Lage der Ebenen.

§. 136.

Grundsatz. Eine gerade Linie oder eine Ebene, welche einen Punkt über, und einen anderen unter einer Ebene, oder deren Verlängerung hat, schneidet dieselbe.

§. 137.

Lehrs. Wenn von einer geraden Linie zwei Punkte in einer Ebene liegen, so liegt die gerade Linie selbst nach ihrer ganzen Länge in dieser Ebene, oder in deren Verlängerung.

Bew. Aus §. 6.

Folg. Wenn eine gerade Linie eine Ebene schneidet, oder auf sie trifft, ohne mit ihr zusammen zu fallen, so hat sie nur einen einzigen Punkt mit der Ebene gemein, welcher der Durchschnittspunkt oder Fußpunkt der Linie heißt.

§. 138.

Lehrs. Die Lage einer Ebene ist vollständig bestimmt, wenn die Lage dreier in ihr liegender Punkte, die nicht durch eine gerade Linie verbunden werden können, gegeben ist.

Bew. Man denke durch zwei Punkte A und B (Fig. 120.) die Gerade AB, und durch diese eine Ebene gelegt, so wird man die Ebene um AB wie um eine Axe drehen, und ihr unendlich verschiedene Lagen geben können; aber es gibt nur eine einzige Lage, in welcher die Ebene auch den dritten Punkt C aufnimmt, und diese ist die durch die drei Punkte A, B und C bestimmte.

Folg. 1) Wenn zwei Ebenen einander schneiden, so liegen die Punkte, welche beiden Ebenen gemeinschaftlich sind, in einer geraden Linie; denn befänden sich unter den gemeinschaftlichen Punkten auch nur drei, die nicht in einer geraden Linie lägen, so würde die Ebene, die man durch diese 3 Punkte legen kann, den beiden sich schneidenden Ebenen gemeinschaftlich seyn; man würde also nicht zwei schneidende Ebenen, sondern nur eine einzige haben. (Contra hyp.) Die Durchschnittslinie zweier sich schneidender Ebenen ist daher immer eine gerade Linie.

2) Durch jede zwei Parallellinien kann eine und nur eine einzige Ebene gelegt werden. Denn die Lage zweier Parallellinien wird durch drei Punkte bestimmt. Zwei Punkte bestimmen nämlich die Lage der einen Linie, und ein dritter die Lage der anderen.

3) Jede Gerade liegt mit den Parallellen, von welchen sie geschnitten wird, in einer Ebene; denn ihre beiden Durchschnittspunkte liegen mit den Parallelen in einer Ebene. (§. 137.)

§. 139.

Erklär. Eine gerade Linie AB steht auf einer Ebene MN senkrecht, (Fig. 121.) wenn sie mit allen

Linien BC, BF, BG..., welche aus ihren Fußpunkt B in der Ebene gezogen werden können, rechte Winkel macht. Außerdem steht sie schief auf der Ebene.

Folg. 1) Eine gerade Linie FG kann nicht auf irgend einem Punkte G der Durchschnittslinie CE zweier sich schneidenden Ebenen AB und CD zugleich senkrecht seyn; (Fig. 122.) denn ist FG senkrecht auf der Ebene AB, so ziehe man in der Ebene AB durch G die Gerade GH, und lege durch F, G und H eine Ebene, so schneidet diese die Ebene CD in einer geraden Linie GK; (§. 136. und 138. Folg. 1.) stünde nun FG auf beiden Ebenen senkrecht, so wäre FGH = FGK = R; es gäbe also in der Ebene FGH durch G auf FG zwei Senkrechte HG und KG. (§. 38.)

2) Eine Gerade KH kann aber auch auf keinem Punkte ausserhalb der Durchschnittslinie also auf einem nicht gemeinschaftlichen Punkte, z. B. H oder K der beiden sich schneidenden Ebenen auf diesen zugleich senkrecht seyn; denn man ziehe von H und K zu einem beliebigen Punkte G der Durchschnittslinie die Geraden HG und KG, so ist, wenn KH auf der Ebene AB senkrecht steht, KHG = R, folglich im △ KGH dann GKH < R, daher HK schief auf der Ebene CD.

Also überhaupt kann eine Gerade nie auf zwei sich schneidenden Ebenen zugleich senkrecht seyn.

§. 140.

Lehrs. Eine Gerade AB, (Fig. 121.) welche auf zwei durch ihren Fußpunkt B auf einer Ebene MN unter einem hohlen Winkel CBD gezogenen geraden Linien BC und BD senkrecht steht, ist auch auf jeder anderen solchen Linie, die in der Ebene MN durch den Punkt B gezogen werden kann, mithin auf der ganzen Ebene senkrecht.

Bew. Man verlängere die Schenkel des Winkels DBC rückwärts, und mache BG = BC, und BF = BD, durch B ziehe man eine gerade Linie z. B. B zwischen den

Schenkeln CB und BD, so wird sie von FG in E, und von CD in H geschnitten. Nun ist

1) △ BFG ≌ △ BCD; (§. 26.)
folglich BFE = BD und
FG = CD; ferner
2) △ BFE ≌ △ BDH; (§. 28.)
folglich BE = BH, und
FE = DH;

zieht man die Linien AC, AG, AF, AD, AE und AH, so wird

3) △ ABC ≌ ABG; (§. 26.)
folglich AG = AC;
4) △ ABF ≌ △ ABD; (§. 26.)
folglich AF = AD;
5) △ AFG ≌ △ ACD; (§. 30.)
daher AFE = ADH;
6) △ AFE ≌ ADH; (§. 26.)
daher AE = AH;
7) △ ABE ≌ △ ABH; (§. 30.)
ABE = ABH = R; d. h.

die Linie AB steht senkrecht auf jeder willkührlich durch B in der Ebene MN gezogenen Linie, folglich auf der Ebene selbst.

Folg. 1) Durch einen Punkt A ausserhalb einer Ebene MN kann man nur eine einzige Linie AB senkrecht auf die Ebene ziehen; denn jede andere, z. B. AF oder AC bildet mit jener und mit einer durch die beiden Fußpunkte B und F, oder B und C gezogenen geraden Linie ein Dreieck, ABF oder ABC, welches dann zwei rechte Winkel enthalten müßte.

2) Die Senkrechte AB ist die kürzeste unter allen den Linien, die zwischen einer Ebene MN, und einem Punkte A ausserhalb derselben möglich sind; denn jede andere Linie ist die Hypotenuse eines rechtwinklichten Dreiecks, von

welchem die Senkrechte eine Kathete ist; deßwegen ist die Länge der Senkrechten AB die Entfernung eines Punktes A von einer Ebene.

§. 141.

Lehrs. Mehrere Linien (Fig. 123.) AP, BP, CP, .. welche in einem Punkte P zusammentreffen, durch welchen eine andere Linie QP auf ihnen senkrecht steht, liegen in einer und derselben Ebene LM.

Bew. Man lege durch die beiden Linien BP und CP eine Ebene LM, so müssen auch die anderen Linien AP DP ... in dieser Ebene liegen. Wollte man nun annehmen, daß eine dieser Linien z. B. AP nicht in diese Ebene, sondern darüber fiele, so lege man durch PQ und AP die Ebene PR, und nehme an, daß PS ihre Durchschnittslinie mit der Ebene LM sey, so wird (§. 139.)

$$QPS = R = APQ; \text{ (ex hyp.)}$$

wären aber PS und PA verschiedene Linien, so könnte man, da beide in der Ebene PR liegen, durch P in dieser Ebene zwei verschiedene Senkrechte, PA und PS auf PQ errichten. Die beiden Linien PA und PS müssen also zusammenfallen, PA muß also auch in der Ebene LM liegen.

Auf gleiche Art läßt sich beweisen, daß auch die übrigen Linien PD, PE... in der Ebene LM liegen müssen.

§. 142.

Lehrs. I. Wenn zwei Gerade AB und CD auf einer Ebene LM senkrecht stehen, so sind sie parallel. (Fig. 124.)

Bew. Durch D errichte man in der Ebene LM die Senkrechte DG = AB, so ist

$$\triangle ABD \cong \triangle BDG. \quad (\text{§. } 26.)$$

folglich $AD = BG$; dann wird

$$\triangle ABG \cong ADG; \quad (\text{§. } 30.)$$

daher $ADG = ABG = R$;

folglich steht GD senkrecht auf BD (ex constr.) auf AD

und auf CD; folglich liegen BD, AD und CD in einer Ebene, (§. 141.) in der auch AB liegt, d. i. AB und CD liegen in der nämlichen Ebene, und da

ABD + BDC = 2 R ist,

so wird AB ⌗ CD.

II. Wenn von zwei Parallellinien AB und CD, die eine AB auf einer Ebene senkrecht steht, so steht auch die andere CD auf derselben senkrecht.

Bew. Aus der Congruenz der im Beweise für No. I. angegebenen Dreiecke folgt, daß GD auf BD, und auf AD, also auf der Ebene ADB (163) senkrecht steht. In dieser Ebene liegt nun AB, mithin auch ihre Parallele CD, folglich ist auch GDC = R.

Nun ist ABD + BDC = 2 R; da aber
ABD = R, so wird
BDC = R;

folglich steht CD auf BD, und auf DG, mithin auf der Ebene BDG, oder LM senkrecht.

Folg. Wenn zwei Linien AB und CD mit einer dritten EF parallel sind, so sind sie auch unter sich parallel, wenn sie auch nicht in derselben Ebene liegen. (Fig. 125.)

Denn wenn man in der Ebene, in welcher AB und EF liegen, durch G auf EF die Senkrechte GH und in der Ebene, in welcher CD und EF liegen, die Senkrechte GJ errichtet, so steht FG senkrecht auf der Ebene HGJ (§. 140.) mithin BH und DJ auch, (§. 142. II.) und BH ⌗ DJ; (§. 142. I.) folglich auch AB ⌗ CD.

§. 143.

Aufg. Aus einem Punkte A ausserhalb einer Ebene MN auf diese eine Senkrechte zu ziehen.

Aufl. Man ziehe in der Ebene MN eine beliebige Gerade CD, lege durch sie und durch den Punkt A die Ebene ACD, ziehe in dieser Ebene durch den Punkt A

eine Senkrechte AE auf CD, und in der Ebene MN eine Senkrechte EB durch E auf CD. Durch AEB lege man noch eine Ebene, und ziehe in dieser aus A eine Senkrechte AB auf BE, so ist AB auf der ganzen Ebene senkrecht.

Bew. Man ziehe in der Ebene MN durch B eine Parallele BF mit CD. Nun steht CD auf EA und EB, mithin auf der ganzen Ebene ABE senkrecht, folglich auch ihre Parallele BF, und es ist

$$ABF = ABE = R;$$

folglich steht AB senkrecht auf BF und BE, folglich auch auf der Ebene FBE oder MN.

§. 144.

Aufg. Durch einen Punkt B einer Ebene MN auf diese eine Senkrechte zu errichten. (Fig. 126.)

Aufl. Man nehme ausserhalb der Ebene MN einen beliebigen Punkt J an, und ziehe aus demselben auf die Ebene MN eine Senkrechte JE, (§. 143.) lege durch JE und den Punkt B die Ebene JEB, und ziehe in dieser durch B mit JE eine Parallele BA, so steht BA senkrecht auf der Ebene MN. (§. 142. II.)

Folg. 1) Durch einen Punkt B einer Ebene gibt es auf dieselbe nur eine einzige Senkrechte AB; denn eine andere in B errichtete Senkrechte müßte ebenfalls zu BA parallel seyn, (§. 142. I.) müßte daher auch mit AB in dieselbe Ebene JBE fallen, (§. 138. Folg. 2.) und es gäbe in dieser Ebene durch B mehrere Parallelen zu JE, welches unmöglich ist.

2) Wenn AB auf die Ebene MN, und AE auf die Linie CD in derselben Ebene senkrecht ist, so ist auch BE auf der Linie CD senkrecht; denn man errichte in E auf die Ebene MN noch eine Senkrechte EJ, so ist

EJ ‡ AB; (§. 142. I.)

daher liegt EJ mit AB, BE und AE in der nämlichen Ebene ABE. (§. 138. Folg. 2.)

Nun ist JED = R = AED, folglich
auch BED = R. (§. 140.)

3) Wenn AB auf der Ebene MN, und BE auf der Linie CD senkrecht ist, so ist auch AE auf CD senkrecht; denn errichtet man in E eine Senkrechte EJ auf die Ebene MN, so ist

EJ $\parallel$ AB, folglich

liegt FJ mit AB, BE und AE in der nämlichen Ebene ABE.

Nun ist JED = R = BED, also
auch AED = R.

§. 145.

Erklär. Wenn eine Gerade AE auf einer Ebene MN schief steht, (Fig. 126.) und man fällt aus einem Punkte A derselben eine Senkrechte AB auf die Ebene, und verbindet die Fußpunkte B und E durch die Gerade BE, so heißt AEB der Neigungswinkel der schiefen Linie AE gegen die Ebene MN.

§. 146.

Lehrs. Wenn die Schenkel AB, BC und DE, EF zweier Winkel ABC und DEF (Fig. 127.) parallel sind, und so liegen, daß, wenn man die Gerade BE durch ihre Scheitel zieht, ABE, DEB und CBE, FEB innere, aber nicht Wechselwinkel sind, so sind jene Winkel gleich; d. i. es wird

ABC = DEF.

Bew. Man mache AB = DE und CB = EF, und ziehe die Linien AD und CF, so ist

AD $\overset{\parallel}{=}$ BE und
CF $\overset{\parallel}{=}$ BE, (§. 59. Folg. 3. b.) folglich

AD $\overset{\parallel}{=}$ CF; daher auch, wenn

man AC und DF zieht,

AC $\#$ DF; daher

$\triangle$ ABC $\cong$ $\triangle$ EDF; (§. 30.) daher

ABC = DEF.

§. 147.

Lehrs. Zwei Parallellinien AB und DE, welche mit einer Ebene MN (Fig. 128.) zusammenstoßen, machen mit dieser Ebene gleiche Neigungswinkel; d. i.

wenn AB $\#$ DE ist, so ist

ABC = DEF.

Bew. Man ziehe aus zwei beliebigen Punkten A und D der Parallelen die Senkrechten AC und DF auf die Ebene MN, und in dieser Ebene die Linien CB und DF, so ist

ACB = DFE = R;

CAB = FDE; (§. 146.)

weil AB $\#$ DE, (ex hyp.) und

AC $\#$ DF ist; (§. 142. I.)

folglich ist $\triangle$ ABC $\sim$ $\triangle$ DEF, und

ABC = DEF.

§. 148.

Lehrs. (Fig. 122.) Wenn man aus einem Punkte G der Durchschnittslinie CE zweier Ebenen AB und CD, sowohl in der einen als in der anderen Ebene die Senkrechten KG und HG auf CE errichtet, so bilden diese einen Winkel KGH, welcher immer gleich groß ist, man mag den Punkt G in der Durchschnittslinie nehmen, wo man will.

Bew. Man ziehe aus irgend einem anderen Punkte E der Durchschnittslinie in beiden Ebenen zwei andere Senkrechte BE und DE auf die Durchschnittslinie, so ist

DEG + EGK = 2 R, folglich

DE $\#$ GK; eben so ist

$$BEG + EGH = 2R;\text{ folglich}$$
$$EB \parallel GH;\text{ mithin}$$
$$KGH = DEB.\ (\text{§. } 146.)$$

§. 149.

Erklär. Der Winkel KGH oder DEB, (Fig. 122.) welchen zwei Linien einschließen, von denen die eine KG oder ED in der Ebene CD, die andere GH oder EB in der Ebene AB durch einen Punkt G oder E der Durchschnittslinie CE jener beiden Ebenen senkrecht steht, heißt der Neigungswinkel dieser Ebenen; durch diesen Winkel ist nämlich die Lage der beiden Ebenen, mithin ihre Neigung bestimmt.

Folg. Wenn der Neigungswinkel FGH = R ist, so steht die Ebene CD senkrecht auf der Ebene AB; (Fig 129.) denn es ist

$$FGK + FGH = 2R;\text{ nun ist}$$
$$\underline{FGH = R;\ (\text{ex hyp.})}$$
$$\text{folglich } FGK = R.$$

Die Ebene CD neigt sich also auf keiner Seite mehr, als auf der anderen gegen die Ebene AB, steht daher auf dieser senkrecht.

§. 150.

Lehrs. Wenn eine Gerade FG auf einer Ebene AB senkrecht steht, so steht auch jede durch FG gelegte Ebene CD auf AB senkrecht.

Bew. Man errichte (Fig. 129.) durch G auf die Durchschnittslinie CE in der Ebene AB die Senkrechte HG, so ist FGH der Neigungswinkel beider Ebenen, weil auch FG auf EC senkrecht steht. (§. 139. und §. 149.) Nun steht FG auch senkrecht auf HG; also ist der Neigungswinkel ein rechter, und die Ebene CD steht senkrecht auf der Ebene AB. (§. 149. Folg.)

Folg. 1) Wenn eine Ebene CD senkrecht steht auf

einer anderen AB, so ist jede in der ersteren Ebene auf die Durchschnittslinie CE gezogene Senkrechte FG auf der Ebene AB senkrecht; denn man ziehe in der Ebene AB durch G auf EC die Senkrechte HG, so ist FGH, der Neigungswinkel beider Ebenen, = R. Ferner ist auch FGC = R; folglich steht FG auf GC und GH, folglich auf der ganzen Ebene AB senkrecht. (§. 140.)

Folg. 2) Wenn die Ebene CD senkrecht auf der Ebene AB steht, und man zieht aus einem beliebigen Punkte F der ersteren Ebene auf die andere eine Senkrechte FG, so liegt diese ganz in der Ebene CD, und steht auf der Durchschnittslinie CE senkrecht; denn eine aus F auf die Durchschnittslinie CE gezogene Senkrechte muß ebenfalls auf der Ebene AB senkrecht stehen, und daher mit jener Senkrechten FG einerlei seyn; weil man von einem Punkte F außerhalb einer Ebene auf diese nur eine Senkrechte ziehen kann.

Folg. 3. Wenn die Ebene CD senkrecht steht, auf der Ebene AB und man errichtet in einem Punkte G der Durchschnittslinie CE, auf die Ebene AB eine Senkrechte, so liegt diese ganz in der Ebene CD; denn eine durch G in der Ebene CD auf die Durchschnittslinie CE gezogene Senkrechte FG ist ebenfalls auf der ganzen Ebene senkrecht, folglich mit jener ersteren Senkrechten einerlei; weil in dem Punkte G der Ebene AB nur eine Senkrechte stehen kann. (§. 144. Folg. 1)

Folg. 4) Die Durchschnittslinie CE zweier Ebenen AB, CD (Fig. 122.) steht auf der Ebene ihres Neigungswinkels KGH senkrecht; denn es ist CGH = R = CGK; daher steht CG oder CE senkrecht auf der Ebene KGH.

Folg. 5. Wenn die Durchschnittslinie BE zweier Ebenen BED und BFE (Fig. 127.) auf einer dritten Ebene DEF senkrecht ist, so sind beide Ebenen auf der dritten senkrecht; denn die Durchschnittslinie BE liegt sowohl in

der Ebene BED, als auch in der Ebene BFE, mithin ist jede Ebene auf der dritten senkrecht.

Folg. 6. Die Durchschnittslinie BE zweier Ebenen DBE und EBF (Fig. 127.), die auf einer dritten Ebene DEF senkrecht stehen, steht auch senkrecht auf dieser Ebene DEF; denn man ziehe aus einem Punkte B der Durchschnittslinie eine Senkrechte auf die Ebene DEF, so liegt diese sowohl in der Ebene BED, als auch in der Ebene BEF, (Folg. 2.) und kann also keine andere, als die Durchschnittslinie BE selbst seyn.

Folg. 7. Zwei sich schneidende Ebenen stehen senkrecht auf der Ebene ihres Neigungswinkels; denn ihre Durchschnittslinie steht senkrecht auf der Ebene des Neigungswinkels, (Folg. 4.) folglich die beiden Ebenen selbst. (Folg. 6.)

§. 151.

Erklär. Zwei Ebenen heißen Parallelebenen, wenn sie sich nirgends einander nähern, und niemals zusammenstoßen können, man mag die Ebenen so weit man will, verlängern.

Folg. Wenn eine Gerade AE auf zwei Ebenen MN und KL zugleich senkrecht ist, so sind diese Ebenen parallel; (Fig. 130.) denn sie können sich nicht schneiden, weil sonst die gerade Linie nicht auf beiden zugleich senkrecht seyn könnte.

§. 152.

Lehrs. Wenn zwei parallele Ebenen (Fig. 131.) AFC und MDE von einer dritten AP geschnitten werden, so sind die Durchschnittslinien AF und DM parallel.

Bew. Die Linien AF und DM liegen als die Durchschnittslinien beide in der Ebene AP, und weil auch zugleich AF in der Ebene AC und DM in der Ebene DE liegt, so können sie nie zusammenstoßen, weil sonst die Ebenen ED und AC sich schneiden würden; (contra hyp.) folglich sind sie parallel. (§. 50.)

Folg. 1) Wenn (Fig. 130.) eine Gerade Linie EH die eine Parallelebene MN in einem Punkte E schneidet, so schneidet sie verlängert auch die andere Parallelebene KL; denn man ziehe aus H und E zwei Senkrechte EA und HC auf die Ebene LK, so sind sie parallel (§. 140. I.) und liegen in derselben Ebene ACEH; nun schneidet diese Ebene die Ebene MN in der Linie FE, mithin ist FE ⧺ CA. (§. 152.) Da nun EH die Parallele FE im Punkte E schneidet, (ex hyp.) so muß sie verlängert auch die andere Parallele CA schneiden, (§. 55. Folg. 3.) mithin auch die Ebene KL in welcher CA liegt.

2) Wenn eine Ebene EFH die eine MN von zwei Parallelebenen MN schneidet, so schneidet sie verlängert auch die andere KL; denn zieht man in der Ebene EFH eine Gerade EH, so schneidet diese verlängert auch die andere Ebene KL, folglich schneidet auch die Ebene EFH, in welcher EH liegt, die Ebene KL.

3) Zwei Parallelebenen MN und KL stehen in allen Punkten gleichweit von einander ab. Denn man fälle aus den Punkten D und E der Ebene MN auf die Ebene KL die Senkrechten DB und EA, so ist

DB ⧺ EA (§. 140. I.)

mithin liegen beide in der Ebene DBEA,

folglich ist DE ⧺ BA (Folg. 2.)

und DB = EA.

§. 153.

Lehrs. Wenn eine Gerade EA auf der einen KL von zwei Parallelebenen senkrecht steht, so steht sie auch auf der anderen MN senkrecht. (Fig. 130.)

Bew. Man ziehe durch A in der Ebene KL zwei beliebige gerade Linien AB, AC, und lege durch EAB und EAC Ebenen, so schneiden diese die Ebene MN in den geraden Linien DE, und FE, und es ist

$$\left.\begin{array}{r} ED \mathbin{\#} BA \\ \text{und } EF \mathbin{\#} AC \end{array}\right\} \text{§. 152.}$$

daher $EAB + AED = 2R$, und

$EAC + AEF = 2R$;

nun ist $EAB = R = EAC$, (ex hyp.)

folglich auch $AEF = R = AED$;

daher AE senkrecht auf der Ebene MN (§. 140.)

§. 154.

Aufg. Durch einen Punkt E mit einer Ebene KL eine Parallelebene zu legen.

Aufl. (Fig. 130.) Man fälle aus E auf die Ebene KL die Senkrechte EA, und ziehe in der Ebene KL durch A unter einem hohlen Winkel zwei Linien AB und AC. Durch B ziehe man in der Ebene EAB zu AB die Parallele DE, und in der Ebene EAC zu AC die Parallele EF, so ist die durch DEF gelegte Ebene MN die verlangte Parallelebene zur Ebene KL.

Bew. Weil EA auf der Ebene KL senkrecht steht, so ist

$CAE = R = BAE$;

Ferner, weil $FE \mathbin{\#} CA$ und

$DE \mathbin{\#} AB$ ist,

wird $CAE + FEA = 2R$ und

$BAE + DEA = 2R$;

folglich $FEA = R = DEA$;

daher steht AE auf der Ebene DEF oder MN senkrecht, und (ex hyp.) auf der Ebene KL, folglich ist (§. 151. Folg.) die Ebene MN parallel zur Ebene KL.

Folg. Durch einen Punkt E gibt es mit einer Ebene nur eine einzige Parallelebene MN; denn gäbe es noch eine andere, so müßte eine durch E auf die Ebene KL gezogene Senkrechte auf der Ebene MN und zugleich auf jener anderen Ebene senkrecht seyn, (§. 151. Folg.) was unmöglich ist.

§. 155.

Lehrs. Die Neigungswinkel KGH und LHJ, welche zwei parallele Ebenen AJC und DMC auf einer Seite mit einer dritten Ebene AFP machen, sind gleich.

Bew. (Fig. 131.) Es ist AF ‡‡ DM; (§. 152.) Errichtet man nun durch einen beliebigen Punkt G auf die Durchschnittslinie FG in der Ebene AFP die Senkrechte GJ, so schneidet dieselbe die Linie DM, und steht auf derselben senkrecht.

Ferner errichte man durch G in der Ebene AFC auf AF die Senkrechte GK, so ist KGH der Neigungswinkel der Ebenen AFC und AFP, und AF steht auf der Ebene dieses Neigungswinkel senkrecht. (§. 150. Folg. 4.)

Auch schneidet diese Ebene die andere Parallelebene DME in der geraden Linie HL, welche mit GK parallel ist, (§. 152.) und DM steht eben sowohl, als ihre Parallele AF auf der verlängerten Ebene des Neigungswinkel KGH senkrecht, (142. II.) also ist LHD = JHD = R, und LHJ der Neigungswinkel der Ebenen AFP u. DME.

Es ist aber LH ‡‡ KG,

folglich LHJ = KGH; d. h.

die Neigungswinkel der beiden Parallelebenen mit der dritten AFP auf einer Seite sind gleich.

§. 156.

Lehrs. Wenn zwei Ebenen AFC und CME eine dritte AFP in parallelen Linien AF und DM schneiden, und nach einer Seite hin mit AFP gleiche Neigungswinkel machen, so sind jene zwei Ebenen parallel.

Bew. (Fig. 131.) Durch einen beliebigen Punkt G der Durchschnittslinie AF errichte man in der Ebene AFP die Senkrechte GJ, und durch den nämlichen Punkt G in der Ebene AFC die Senkrechte GK, so ist KGH der Neigungswinkel der Ebenen AFC und DME, wie im §. 155; und AF steht auf dessen Ebene senkrecht (§. 150. Folg. 4.,)

so wie auch dessen Parallele DM. Diese Ebene stößt in H mit der Ebene DME zusammen, und schneidet sie in der geraden Linie HL.

Nun ist MD auf der Ebene des Neigungswinkels KGH senkrecht, also auch senkrecht auf HL und HJ, mithin ist LHJ der Neigungswinkel von AFP und DME.

Da nun LHJ = KGH ist, (ex hyp.)
so wird LH ‡‡ KG.

Wird daher durch H auf GK eine Senkrechte HK gezogen, so steht diese auch senkrecht auf HL. Nun steht die Ebene GS der beiden Neigungswinkel senkrecht auf den Ebenen AFC und DME; (§. 150. Folg. 7.) folglich steht auch KH auf diesen beiden Ebenen senkrecht; (§. 150. Folg. I.) also sind diese Ebenen parallel.

Zweiter Abschnitt.

Von körperlichen Winkeln und von Körpern überhaupt.

§. 157.

Erklär. 1) Wenn mehrere geradlinigte hohle Winkel ACB, BCD, DCE, ACE (Fig. 132.) in verschiedenen Ebenen mit ihren Scheitelpunkten in einem Punkte C zusammenstoßen, und jede zwei nächstliegende einen gemeinschaftlichen Schenkel haben, so nennt man die von den ebenen Winkeln am Punkte C gebildete Ecke oder Höhlung einen körperlichen Winkel, oder eine körperliche Ecke.

2) Die Schenkel der einzelnen ebenen Winkel heißen die Kanten der körperlichen Ecke.

Folg. Um eine körperliche Ecke zu bilden, werden wenigstens drei ebene Winkel erfordert, die alle in verschiedenen Ebenen liegen.

§. 158.

Lehrs. Von drei ebenen Winkeln, die eine körperliche Ecke bilden, ist die Summe jeder zwei Winkel größer, als der dritte.

Bew. Dieser Satz ist von selbst klar, wenn die drei ebenen Winkel einander gleich sind.

Der Beweis muß daher nur für den Fall gegeben werden, wenn diese ebenen Winkel ungleich sind.

Es sey daher (Fig. 133.)

$$AKB > AKC$$
$$\geqq BKC.$$

Man mache in der Ebene des Winkels AKB den Winkel

$$DKB = CKB \text{ und}$$
$$KD = KC.$$

Zieht man dann durch den Punkt D die Linie AB, und verbindet die Punkte A, C und B, C durch die Linien AC und CB, so ist

$$\triangle DKB \cong \triangle BKC, \text{ (§. 26.)}$$

folglich $BD = BC$.

Im $\triangle ABC$ ist ferner

$$AD + DB < AC + CB;$$

da aber $\underline{BD = BC \text{ ist}}$, so wird

$$AD < AC,$$

und man hat in den beiden Dreiecken AKD, AKC

$$AK = AK,$$
$$CK = DK$$
$$\text{aber } AD < AC; \text{ daher}$$
$$AKD < AKC, \text{ und}$$
$$AKD + DKB < AKC + CKB$$
$$\text{d. i. } AKB < AKC + CKB.$$

§. 159.

Lehrs. Die Summe aller ebenen Winkel, welche eine erhabene körperliche Ecke einschließen, ist kleiner als 4R.

Bew. Man schneide die erhabene körperliche Ecke unterhalb ihrer Spitze K durch eine Ebene ab, so schneidet diese jeden von den n ebenen Winkeln der körperlichen Ecke in einer geraden Linie AA. Man erhält daher in der Durchschnittsebene ein Polygon AAA.... von n Seiten, und über demselben n Dreiecke, deren untere Winkel mit den Polygonswinkeln des n Ecks n dreiseitige körperliche Ecken bilden. Bezeichnet man nun jeden Polygonswinkel des n Ecks mit A, jeden unteren anliegenden Winkel der Dreiecke mit a, und jeden oberen am Punkte K mit x; so ist in jeder von den dreiseitigen körperlichen Ecken

$$a + a = 2a > A \text{ (§. 158.)}$$

daher in allen n dreiseitigen Ecken

$$2na > nA.$$

Nun ist nA die Summe aller Polygonswinkel des n Eckes, also

$$nA = 4nR - 4R; \text{ (§. 58.)}$$

folglich $2na > 4nR - 4R$.

Ferner ist in jedem Dreiecke AKA

$$a + a + x = 2R$$

$$2a + x = 2R; \text{ folglich}$$

in den n Dreiecken $2na + nx = 2nR$;

oben war $\underline{2na > 4nR - 4R}$

daher ist $nx < 4R$.

§. 160.

Lehrs. Zwei körperliche Ecke sind congruent, wenn beide aus gleichen und gleichvielen ebenen geradlinigten Winkeln bestehen, und wenn die Neigungen der Ebenen dieser Winkel gegeneinander in beiden Ecken der Ordnung nach gleich sind. (Fig. 135.)

Bew. Denn denkt man sich die eine Ecke in die Höhlung der anderen mit k auf K, und mit einer Kante ka auf eine gleichliegende KA gelegt, so fallen auch alle

übrigen Kanten aufeinander, und die beiden körperlichen Ecken decken einander.

Folg. 1) Eine körperliche Ecke ist daher durch die Anzahl, Größe der ebenen Winkel bestimmt, von welchen sie gebildet wird, und durch die Lage dieser Winkel, d. h. durch die Neigung, welche die Ebenen jeder zwei anliegenden, der Ordnung nach, haben.

§. 161.

Erklär. Ein Körper ist ein von allen Seiten begränzter Raum; diese ganze Gränze nun, innerhalb welcher ein Körper eingeschlossen ist, heißt seine Oberfläche.

Diese Oberfläche kann aus mehreren ebenen, oder aus ebenen und krummen, oder auch nur aus einer einzigen krummen Fläche bestehen.

2) Die Ebenen, welche einen Körper begränzen, nennt man Seitenflächen, und jede gerade Linie, in welcher zwei Seitenflächen zusammenstoßen, eine Kante des Körpers.

Folg. Drei Ebenen schließen noch keinen Körper ein; daher besteht die Oberfläche eines von lauter ebenen Flächen begränzten Körpers wenigstens aus vier Seitenflächen.

§. 162.

Lehrs. Zwei oder mehrere Körper sind congruent, wenn sie von gleichvielen der Ordnung nach congruenten Seitenflächen und Ecken begränzt sind.

Bew. Denn die Größe und Gestalt eines Körpers ist durch die Größe, Gestalt und Lage aller Flächen bestimmt, durch die er begränzt wird. Sind daher zwei Körper von gleichvielen der Ordnung nach congruenten Seitenflächen begränzt, und haben diese in derselben Ord-

nung gleiche Neigungen zu einander, so daß auch alle Ecken des einen mit den gleichliegenden Ecken des anderen congruent sind, so haben beide Körper einerlei Gestalt und Größe, decken sich, und sind daher congruent.

Folg. Haben zwei Körper gleichviele der Ordnung nach ähnliche Seitenflächen, und sind die Ecken des einen den gleichliegenden Ecken des anderen congruent, so sind die Körper ähnlich; denn sie haben dann einerlei Gestalt.

§. 163.

Erklär. Reguläre Körper heißen jene, deren Seitenflächen congruente und reguläre Figuren und deren Ecken congruent sind.

§. 164.

Lehrs. Es kann nicht mehr, als fünf reguläre Körper mit lauter erhabenen Ecken geben; und diese sind

1) das Tetraëdrum,
2) das Octaëdrum,
3) das Icosaëdrum,
4) das Hexaëdrum, und
5) das Dodekaëdrum.

Bew. Um zu erfahren, wie viele reguläre Körper es höchstens geben könne, hat man die Winkel der regulären Figuren auf alle mögliche Weise zu körperlichen Ecken zusammenzustellen, und die Anzahl dieser Zusammenstellungen aufzuzählen. Nun muß aber die erhabene Ecke eines Körpers immer kleiner seyn, als vier R; so oft demnach die Summe der zusammengestellten Winkel $\geqq 4\,R$ ist, so können diese Winkel keine Ecke, somit keinen Körper überhaupt, also auch keinen regulären bilden.

Nimmt man zuerst die einfachste reguläre Figur, nämlich das gleichseitige Dreieck, so beträgt in demselben jeder Winkel 60° und

$$3 . 60^\circ = 180^\circ < 360^\circ;$$

folglich läßt sich aus je drei solchen Winkeln eine körperliche erhabene Ecke bilden. Da nun zur Begränzung des Raums nach allen Seiten hin wenigstens 4 ebene Flächen erfordert werden, so kann man

1) durch Zusammenstellung von 4 congruenten gleichseitigen Dreiecken einen regulären Körper bilden, welcher

Tetraeder

heißt.

Ferner ist $4 . 60^\circ = 240^\circ$; mithin geben je vier Winkel von gleichseitigen Dreiecken eine erhabene körperliche Ecke. Setzt man nun so viele dergleichen Ecken zusammen, als zur allseitigen Begränzung des Raumes erforderlich sind, so erhält man

2) durch Zusammenstellung von 8 congruenten gleichseitigen Dreiecken wieder einen regulären Körper, welcher

Oktaeder

heißt.

Da $5 . 60^\circ = 300^\circ$ ist, so kann auch aus je fünf ebenen Winkeln gleichseitiger Dreiecke eine erhabene Ecke gebildet werden. Man erhält auf diese Weise

3) einen von 20 congruenten gleichseitigen Dreiecken begränzten regulären Körper, welcher

Ikosaeder

heißt.

Da $6 . 60^\circ = 360^\circ$ ist, so läßt sich durch je sechs Winkel eines gleichseitigen Dreiecks keine erhabene Ecke mehr bilden, also auch kein regulärer Körper mit solchen Ecken.

Nimmt man das reguläre Viereck, oder das Quadrat, so ist jeder Polygonswinkel $= 90^\circ$, daher

$$3 . 90 = 270^\circ, \text{ und}$$

4) der reguläre Körper, welcher von 6 congruenten Quadraten eingeschlossen ist, heißt

Hexaeder, oder Kubus.

Da 4·90 = 360° ist, so gibt es keinen regulären Körper mehr, dessen Ecken durch Zusammenstellung von vier Winkeln congruenter Quadrate gebildet wären.

Nimmt man das reguläre Fünfeck, so ist jeder Polygonswinkel = 108°.

Da nun 3·108° = 324° ist, so geben je drei Polygonswinkel regulärer Fünfecke eine erhabene Ecke, und

5) der von 12 regulären Fünfecken eingeschlossene Körper heißt

Dodekaeder.

Nimmt man das reguläre Sechseck, so ist der Polygonswinkel desselben = 120°; da nun 3·120 = 360° ist, so geben drei Winkel eines solchen regulären Sechsecks keine erhabene körperliche Ecke mehr, und es gibt keinen von regulären Sechsecken begränzten Körper. Noch weniger können congruente reguläre Vielecke von mehr als 6 Seiten einen solchen Körper einschließen. (§. 58. Folg. 4.)

I.) Vom Prisma.

§. 165.

Erklär. Wenn man durch die Ecken A, B, C, D einer geradlinigten Figur ABCD (Fig. 136.) ausserhalb ihrer Ebene parallele Linien AE, BF, CG, DH zieht, die gegen die Grundfläche beliebig geneigt seyn mögen, dann durch je zwei benachbarte dieser Linien Ebenen AEBF, BFCG.... gelegt denkt, und diese in beliebiger Entfernung von der Grundfläche mit einer der Grundfläche parallelen Ebene EFGH durchschneidet, so wird der zwischen allen diesen Ebenen eingeschlossene körperliche Raum ein Prisma genannt.

2) Die beiden parallelen Figuren ABCD und EFGH

nennt man die Grundflächen, die Ebenen AEBF, BFCG, ... die Seitenflächen, die Parallelen AE, BF, ... die Seiten oder Kanten, und die Entfernung der beiden parallelen Ebenen ABCD und EFGH, oder eine aus einem beliebigen Punkte der einen auf die andere gezogene Senkrechte die Höhe des Prisma.

Ein Prisma heißt senkrecht, oder schief, je nachdem alle seine Seiten und Seitenflächen senkrecht oder schief auf der Grundfläche stehen.

Folgesätze. 1) Die Seitenflächen eines Prisma sind Parallelogramme;
denn die beiden parallelen Grundflächen werden von jeder Seitenfläche in parallelen Linien geschnitten; (§. 152.) also ist

AB ⫲ EF; BC ⫲ FG; u. s. w.

Dann ist AE ⫲ FG; BF ⫲ CG; (ex defin.) u. s. w. folglich sind ABEF, BCFG, ... Parallelogramme.

2.) Die beiden Grundflächen sind congruente Figuren; denn es ist

AB = EF; BC = FG; (Folg. 1., und 59. Folg. 1. e.) und EFG = ABC; FGH = BCD; (Folg. 1. und §. 146.) folglich sind alle Seiten und Winkel der beiden Figuren der Ordnung nach gleich.

3) Alle Nebenseiten sind unter sich gleich und parallel, weil jede derselben der nächstanliegenden gleich und parallel ist. (Folg. 1. und 2; und §. 142. Folg.)

4) Jedes Prisma hat so viele Seiten und Seitenflächen, als seine Grundfläche Seiten hat.

5) Ein Prisma ist also ein Körper, welcher von zwei congruenten Polygonen, und von so vielen Parallelogrammen begränzt ist, als jedes Polygon Seiten hat.

Prismen heißen nach der Anzahl der Seiten ihrer Grundflächen drei- vier- oder vielseitig.

6) Wenn ein Prisma von einer Ebene JKLM (Fig. 136.) parallel zur Grundfläche durchschnitten wird, so ist die Durch-

schnittsfigur mit der Grundfläche congruent, und jeder Abschnitt der Seitenflächen ein Parallelogramm. Denn man erhält hierdurch wieder ein Prisma AM. (§. 165.)

7) Wenn eine Seite eines Prisma auf der Grundfläche desselben senkrecht aufsteht, so stehen alle übrigen Seiten, (§. 142. II.) und daher auch alle Seitenflächen (§. 150. Folg. 5.) auf derselben senkrecht, und das Prisma ist ein senkrechtes.

8) Im senkrechten Prisma ist jede Seite auch zugleich die Höhe; und jede Seitenfläche ein Rechteck.

§. 166.

Erklär. Wenn man in den beiden Grundflächen eines mehrseitigen Prisma (Fig. 136.) zwei gleichliegende Diagonalen AC und EG zieht, so liegen sie in der Ebene der parallelen und gleichen Kanten AE und CG; daher ist auch AC ‡‡ EG, und ACGE ein Parallelogramm. (Die Diagonalfläche des Prisma.)

Folg. Man kann ein mehrseitiges Prisma durch Diagonalflächen in zwei oder mehrere dreiseitige zerlegen.

§. 167.

Erklär. 1) Ein Prisma, dessen Grundfläche ABCD (Fig. 137.) ein Parallelogramm ist, heißt ein Parallelopipedum, und zwar ein senkrechtes oder schiefes, je nachdem alle Seitenflächen senkrecht oder schief auf den Grundflächen stehen.

Folg. Die Oberfläche eines Parallelopipedums besteht aus lauter Parallelogrammen.

2) Ein senkrechtes Parallelopipedum heißt rechtwinklicht, wenn dessen Grundfläche ABCD ein Rechteck ist. (Fig. 138.)

Folg. Im rechtwinklichten Parallelopipedum ist jede der sechs begränzenden Flächen ein Rechteck.

3) Sind in einem rechtwinklichten Parallelopipedum

die 6 Flächen Quadrate, so heißt dasselbe ein **Würfel.** (**Kubus.**)

II.) Vom Cylinder.

§. 168.

Erklär. 1) Ein Körper, welcher von zwei gleichen parallelen Kreisen ABD und EFG und von einer durch ihre Peripherien gelegten krummen Fläche begränzt ist, die so beschaffen ist, daß jede Linie AE, welche von einem Punkte A der Peripherie des einen Kreises zu einem Punkte E der Peripherie des anderen Kreises parallel mit der die Mittelpunkte der beiden Kreise verbindenden Linie CO gezogen wird, ganz in jener krummen Fläche liegt, heißt ein **Cylinder**, oder eine **Walze.** (Fig. 139. 140.)

2) Man nennt

die beiden parallelen Kreise die **Grundflächen;**

die durch ihre Peripherien gelegte krumme Fläche, die **Seitenfläche;**

die gerade Linie CO, welche die Mittelpunkte verbindet, die **Axe;**

jede zu der Axe CO parallele Linie, welche ganz in der Seitenfläche liegt, eine **Seite**, und

die Entfernung der Grundflächen, oder eine auf beiden senkrechte Linie EJ die **Höhe** des Cylinders.

Folg. 1) Jede Seite ist der Axe gleich, und hat mit derselben einerlei Neigung zur Grundfläche; denn

es ist AE ⧣ CO, (§. 152.) und
AC ⧣ EO (ex defin.)
also AE = CO.

Eben so wird auch BF = CO.

Hieraus folgt ferner, daß auch AE und BF mit CO einerlei Neigung zur Grundfläche haben. (§. 147.)

2) Alle Seiten eines Cylinders sind gleich und parallel, und haben einerlei Neigung zur Grundfläche. (Folg. 1.)

3) Jeder zu einer Grundfläche ABD parallele Schnitt des Cylinders ist ein Kreis, dessen Mittelpunkt Q in der Axe CO liegt, und dessen Halbmesser dem Halbmesser der Grundfläche gleich ist; denn legt man durch die Axe zwei beliebige Ebenen ACO und BCO, so schneiden sie die Durchschnittsebene in den Linien QH und QL, und die Grundfläche in den Linien CA und CB. Nun ist

QH ‡‡ CA und QL ‡‡ CB, (§. 152.)
AH ‡‡ CQ und BL ‡‡ CQ; daher

sind ACQH und BCLQ Parallelogramme; und QH = AC und QL = BC = AC; d. h. alle Punkte im Umfange des Schnittes sind gleichweit von Q entfernt, und bilden daher einen Kreis um Q, dessen Halbmesser = AC ist.

§. 169.

Erklär. Wenn die Axe eines Cylinders, und daher auch alle Seiten desselben senkrecht auf der Grundfläche (§. 168. Folg. 2.) stehen, so heißt der Cylinder senkrecht, sonst schief.

Folg. 1) Im senkrechten Cylinder ist die Axe und jede Seite zugleich die Höhe desselben. (§. 168. 2.)

2) Wenn ein Cylinder längst seiner Axe CO durchschnitten wird, (Fig. 139. und 140.) so ist der Schnitt AEGD jederzeit ein Parallelogramm, und zwar überall, wo die Axe auf der Durchschnittslinie jener Durchschnittsebene mit der Grundfläche senkrecht steht, ein Rechteck;

denn es ist EG ‡‡ AD, (§. 152.)
und DG ‡‡ AE, (§. 168. Folg. 1.)

daher AEGD ein Parallelogramm.

Steht nun CO auf der Durchschnittslinie AD senkrecht, so ist

ACO = R; mithin auch
EAD = R, weil
AE ‡‡ CO ist; folglich ist das Parallelogramm AEGD rechtwinklicht.

Bei dem senkrechten Cylinder, wo die Axe auf der ganzen Grundfläche, und daher auch auf jeder Durchschnittslinie senkrecht steht, die durch ihren Fußpunkt C geht, ist jede durch die Axe gelegte Ebene ein Rechteck, und steht zugleich senkrecht auf der Grundfläche. (§. 150.)

Bei dem schiefen Cylinder aber ist nur jene Durchschnittsebene BNFR, welche mit der Axe dieselbe Neigung zur Grundfläche hat, ein Rechteck. (Fig. 139.)

Auch steht im schiefen Cylinder nur das Axenparallelogramm AEGD, welches zugleich durch eine aus O auf die Grundfläche senkrecht gezogene Linie geht, auf der Grundfläche senkrecht. (§. 150.)

3) Wenn sich ein Rechteck um eine feststehende Seite dreht, bis es wieder in seine erste Lage kömmt, so beschreibt es einen Cylinder.

4) Jeder Cylinder kann als ein Prisma von unendlich vielen Seiten betrachtet werden; denn die Grundflächen sind parallele congruente Unendlichecke; die Seiten des Cylinders sind unter sich parallel und gleich, daher die Seitenflächen unendlich viele Parallelogramme.

§. 170.

Erklär. 1) Wenn man von einem Punkte K ausserhalb der Ebene einer geradlinigten Figur ABCD nach allen Winkelpunkten derselben gerade Linien zieht, und durch je zwei dieser Linien und die anliegende Seite jener Figur eine Ebene legt, so entsteht ein vollkommen begränzter körperlicher Raum, welcher eine Pyramide genannt wird. (Fig. 141.)

2) Die geradlinigte Figur ABCD nennt man die Grundfläche;

die Ebenen AKB, BKC... die Seitenflächen;

die geraden Linien AK, BK.... die Seiten oder Kanten;

den Punkt K die Spitze, und

die Entfernung der Spitze von der Grundfläche, oder eine aus jener auf diese gezogene Senkrechte KN die Höhe der Pyramide.

Folg. 1) Jede Seitenfläche einer Pyramide ist ein Dreieck, das eine Seite der Grundfläche zur Grundseite, und seine Spitze im Punkte K hat.

2) Eine Pyramide hat eben so viele Seiten oder Seitenflächen, als ihre Grundfläche Winkel oder Seiten hat.

§. 171.

Erklär. Nach der Anzahl der Seiten ihrer Grundflächen sind die Pyramiden drei= vier= oder vielseitig.

Eine Pyramide heißt gleichseitig, wenn alle Seiten derselben gleich, also alle Seitenflächen gleichschenklichte Dreiecke sind; sonst ungleichseitig.

§. 172.

Lehrs. Wenn eine Pyramide von einer Ebene EFGH parallel zur Grundfläche durchschnitten wird, so ist die Durchschnittsfigur der Grundfläche ähnlich; d. i. (Fig. 141.)

$$ABCD \backsim EFGH.$$

Bew. 1) Die Durchschnittsfigur hat eben so viele Seiten, wie die Grundfläche, weil die Durchschnittsebene von jeder Seitenfläche in einer geraden Linie durchschnitten wird.

2) Die Winkel sind in beiden Figuren der Ordnung nach gleich; denn

weil $AB \# EF$, und $BC \# FG$ ist,

so wird $ABC = EFG$; u. s. w.

3) Es ist im $\triangle AKB$

$$FK : EF = BK : AB;$$ und

im $\triangle BKC$ ist

$$FK : FG = BK : BC;$$

folglich $EF : FG = AB : BC$; u. s. w.

d. h. jedes Paar homologer Seiten in beiden Figuren ist proportionirt.

Daher wird ABCD ∽ EFGH. (§. 84.)

Folg. 1) Wenn eine Pyramide mit einer zur Grundfläche parallelen Ebene EFGH durchschnitten wird, so verhalten sich die beiden Figuren der Durchschnittsfläche und der Grundfläche, wie die zweiten Potenzen ihrer Entfernungen von der Spitze, oder es ist

$$ABCD : EFGH = (KN)^2 : (KO)^2;$$

denn weil ABCD ∽ EFGH ist, so ist

$$ABCD : EFGH = (CD)^2 : (GH)^2; \text{ (§. 128.)}$$

Fällt man nun aus der Spitze K auf die Grundfläche ABCD die Senkrechte KN, so schneidet die Ebene DKN die Grundfläche und die parallele Durchschnittsebene in den Linien DN und HO, und es ist

$$DN \# HO; \text{ (§. 152.)}$$

daher wird im △ DKN

$$KH : KD = KO : KN, \text{ (§. 81.)}$$

und im △ DKC ist

$$KH : KD = GH : CD, \text{ da}$$

$$KO : KN = GH : CD, \text{ und}$$

$$(KO)^2 : (KN)^2 = (GH)^2 : (CD)^2$$

folglich $ABCD : EFGH = (KN)^2 : (KO)^2$.

Folg. 2) Die von einer zur Grundfläche parallelen Ebene abgeschnittene Pyramide EFGHK ist der ganzen ABCDK ähnlich; denn die beiden Pyramiden haben

1) gleichviele, der Ordnung nach ähnliche Begränzungsflächen; indem

ABCD ∽ EFGH; (§. 172.)

△ AKB ∽ △ EKF; u. s. w. (§. 85.)

2) Die gleichliegenden Ecken sind in beiden congruent; (§. 160.) da nämlich

FEH = ABD

KEF = KAB,

KEH = KAD ist, und

die Neigungswinkel der parallelen Ebenen EFGH und

ABCD zu jeder von den zwei Seitenflächen AKB und AKD gleich sind, so ist

die Ecke A ∽ der Ecke E; u. s. w.

daher wird Pyr. ABCDK ∽ Pyr. EFGHK. (§. 162. Folg.)

§. 173.

Erklär. 1) Wenn eine Pyramide mit einer zur Grundfläche ABCD parallelen Ebene EFGH durchschnitten wird, so heißt der zwischen dieser Durchschnittsfläche und der Grundfläche enthaltene Theil der Pyramide eine abgekürzte Pyramide. (Pyramis decurtata.) (Fig. 141.)

2) Die beiden Parallelebenen ABCD und EFGH nennt man die Grundflächen und die Entfernung derselben ON die Höhe der abgekürzten Pyramide.

Folg. Die beiden Grundflächen sind einander ähnlich. (§. 172.)

§. 174.

Erklär. Wenn man durch eine Diagonale AC der Grundfläche einer Pyramide und durch deren Spitze eine Ebene legt, so ist die Durchschnittsfigur AKC ein Dreieck. (Diagonalfläche der Pyramide.)

Folg. Jede mehrseitige Pyramide läßt sich durch solche Diagonalflächen in lauter dreiseitige Pyramiden zerlegen.

IV. Vom Kegel.

§. 175.

Erklär. 1) Ein Körper, (Fig. 142. und 143.) welcher von einem Kreise ABD und einer krummen Fläche begränzt wird, die durch den Umfang jenes Kreises geht, und sich in einem Punkte K so endigt, daß jede Gerade KA, KB . . . aus diesem Punkte nach einem Punkte der Kreislinie gezogen, ganz in dieser krummen Fläche liegt, heißt ein Kegel.

2) Der Kreis ABD heißt die Grundfläche; die

durch die Peripherie desselben gelegte krumme Fläche die Seitenfläche;

der Punkt K die Spitze;

eine aus der Spitze zum Mittelpunkte C der Grundfläche gezogene Linie KC die Axe;

jede Gerade KA, KB... von der Spitze nach der Peripherie der Grundfläche gezogen, eine Seite; und

die Entfernung der Spitze von der Grundfläche oder eine aus K auf die Grundfläche gezogene Senkrechte KN die Höhe des Kegels.

3) Ein Kegel heißt senkrecht oder schief, je nachdem seine Axe senkrecht oder schief auf der Grundfläche steht.

4) Ein Kegel heißt gleichseitig, wenn alle Seiten desselben gleich sind; sonst aber ungleichseitig.

Folg. 1) Ein senkrechter Kegel ist gleichseitig; denn man nehme an der Peripherie der Grundfläche zwei beliebige Punkte A und B, ziehe die Linien oder Seiten KA und KB, und die Radien CA und CB, so ist

$$CA = CB;\ CK = CK,\ \text{und}\ BCK = R = ACK;$$

$$\text{daher}\ \triangle BKC \cong \triangle AKC,$$

$$\text{und}\ BK = AK.$$

2) Der gleichseitige Kegel ist senkrecht; denn man nehme an der Peripherie der Grundfläche nebst den beiden Punkten A und B noch einen dritten D, so daß AC und CD in einer geraden Linie liegen, so ist

$$\triangle AKC \cong \triangle BKC \cong \triangle DKC;\ (\text{§. } 30.)$$

$$\text{daher}\ BCK = DCK = ACK = R;$$

folglich steht die Axe CK auf AD und CB, daher auch auf der ganzen Grundfläche senkrecht, (§. 140.) und der Kegel ist senkrecht.

3) Jeder zur Grundfläche ABD (Fig. 142.) parallele Schnitt eines Kegels ist ein Kreis, dessen Mittelpunkt O in der Axe CK liegt; denn legt man durch zwei beliebige Punkte A und B der Peripherie und durch die Axe CK

zwei Ebenen ABD und BCK, so schneiden diese die krumme Seitenfläche in den geraden Linien AK und BK, und die zwei Ebenen ABD und EFG in den geraden Linien CA, CB, OE, OF, und es ist

$$OE \,\#\, CA \text{ und } OF \,\#\, CB;$$

daher wird im △ AKC

$$OE : CA = OK : CK$$

und im △ BKC (§. 81.)

$$OF : CB = OK : CK$$

folglich $OE : CA = OF : CB$;

nun ist $CA = CB$, daher auch

$$OE = OF;$$

d. h. die zwei Punkte E und F im Umfange der Durchschnittsebene EFG sind vom Punkte O der Axe gleichweit entfernt; also ist EFG ein Kreis und O sein Mittelpunkt.

4) Im Kegel verhalten sich die beiden Kreisebenen einer zur Grundfläche parallelen Durchschnittsfläche und der Grundfläche selbst, wie die zweiten Potenzen ihrer Entfernungen von der Spitze; denn es ist

Circ. EFG : Circ. ABD $= (OG)^2 : (CD)^2$; (§. 129. Folg.)

Zieht man nun aus K eine Senkrechte KN auf die Grundfläche, so wird

$$OG \,\#\, CD;$$

daher ist im △ DKC

$$KO : KC = OG : CD, \text{ (§. 81.) oder auch}$$

$$(KO)^2 : (KC)^2 = (OG)^2 : (CD)^2.$$

folglich Circ. EFG : Circ. ABD $= (KO)^2 : (KC)^2$.

5) Wenn ein Kegel längst seiner Axe durchschnitten wird, so ist die Durchschnittsfigur immer ein Dreieck. (Axendreieck.)

6) Im senkrechten Kegel (Fig. 143.) ist jedes Axendreieck gleichschenklicht, (Folg. 1.) und steht auf der Grundfläche senkrecht. (§. 150.)

Im schiefen Kegel aber (Fig. 142.) ist nur jenes

Axendreieck BKL gleichschenklicht, welches mit der Axe CK einerlei Neigung zur Grundfläche hat; denn es ist

$$\triangle CKL \cong \triangle CKB; \text{ (§. 26.)}$$

daher $LK = BK$.

Ferner ist im schiefen Kegel nur jenes Axendreieck AKD auf der Grundfläche senkrecht, welches zugleich durch die Axe und durch eine aus der Spitze K auf die Grundfläche senkrecht gezogene Linie KN gelegt ist. (§. 150.)

7) Wenn sich ein rechtwinklichtes Dreieck um eine Kathete dreht, so entsteht ein senkrechter oder gleichseitiger Kegel.

8) Jeder Kegel kann als eine Pyramide von unendlich vielen Seiten betrachtet werden; denn die Grundfläche des Kegels ist ein Kreis, also ein reguläres Vieleck von unendlich vielen Seiten, mithin besteht die krumme Seitenfläche desselben aus unendlich vielen Dreiecken, die mit dem Kegel einerlei Spitze haben, und deren Grundlinien zusammen die Peripherie der Grundfläche des Kegels ausmachen.

§. 176.

Erklär. 1) Wenn ein Kegel zur Grundfläche parallel durchschnitten wird, so heißt der zwischen den beiden Parallelkreisen EFG und ABD enthaltene Theil ein abgekürzter Kegel. (Conus decurtatus.) (Fig. 142.)

2) Die beiden Parallelkreise nennt man die Grundflächen, und die Entfernung derselben die Höhe des abgekürzten Kegels.

Folg. Der abgekürzte Kegel kann daher auch als eine abgekürzte Pyramide von unendlich vielen Seiten betrachtet werden, und der von einer zur Grundfläche parallelen Ebene abgeschnittene obere Kegel ist dem ganzen ähnlich. (§. 172. Folg. 2.)

V.) Von der Kugel.

§. 177.

Erklär. Ein Körper, der von einer einzigen krummen Oberfläche begränzt wird, die so beschaffen ist, daß alle Punkte derselben von einem Punkte C innerhalb gleich weit entfernt sind, heißt eine Kugel. Sphäre.) (Fig. 144.)

Man nennt

den Punkt C den Mittelpunkt;

jede vom Mittelpunkte C zur Oberfläche der Kugel gezogene Gerade CA, CB... einen Halbmesser; (Radius.)

jede Gerade DE zwischen zwei Punkten der Kugelfläche eine Sehne; und

eine Sehne, welche durch den Mittelpunkt der Kugel selbst geht, einen Durchmesser der Kugel.

Folg. 1) Alle Halbmesser einer Kugel sind einander gleich; eben so alle Durchmesser.

2) Zwei Kugeln, welche gleiche Halbmesser haben, sind congruent. Man vergl. §. 18.

§. 178.

Lehrs. Wenn eine Kugel von einer Ebene durchschnitten wird, so ist die Durchschnittsfigur, (der Kugelschnitt) ein Kreis, dessen Mittelpunkt in demjenigen Durchmesser der Kugel liegt, welcher auf der Ebene des Schnitts senkrecht steht.

Bew. I. Wenn der Kugelschnitt AGB (Fig. 144.) durch den Mittelpunkt der Kugel geht.

Es sei PQ ein durch den Mittelpunkt C der Kugel auf die Durchschnittsebene AGB senkrecht gezogener Durchmesser. Nimmt man nun im Umfange der Durchschnittsfigur die beliebigen Punkte A, G und B, so stehen dieselben von C um den Radius der Kugel, also gleich weit ab, mithin ist der Kugelschnitt ein Kreis.

II. Wenn der Kugelschnitt DJED außer dem Mittelpunkte C liegt.

Es sei wieder PQ ein Durchmesser senkrecht auf der Durchschnittsebene DJED. Nimmt man im Umfange derselben zwei Punkte E und J, und zieht OJ, OE, CE, CJ, so

wird $\triangle$ CJO $\cong$ $\triangle$ COE; (§. 40.)

daher ist OJ = OE; d. h.

jede zwei Punkte im Umfange der Durchschnittsfigur DJE sind vom Punkte O gleichweit entfernt; folglich ist DJED ein Kreis, und dessen Mittelpunkt ein Punkt O des senkrechten Durchmessers PQ.

Folg. 1) Die Durchschnittsfigur oder der Kugelkreis DJED ist um so größer, je kleiner seine Entfernung CO vom Mittelpunkte der Kugel ist; denn der Halbmesser dieses Kreises, d. i.

$$OJ = \sqrt{(CJ)^2 - (CO)^2}$$

wird größer, wenn CO kleiner wird.

2) Wenn der Kugelkreis durch den Mittelpunkt der Kugel selbst geht, so ist er ein größter Kreis der Kugel, und hat mit dieser einerlei Halbmesser;

denn dann wird

$$OJ = \sqrt{(CJ^2) - O}$$

$= CJ = AC$, und dieser Werth von OJ ist ein größter.

3) Alle größten Kugelkreise sind gleich, weil sie alle den Halbmesser der Kugel zum Halbmesser haben.

§. 179.

Erklär. Eine Ebene MN, (Fig. 144.) welche mit der Kugeloberfläche nur einen Punkt P gemein hat, heißt eine Berührungsebene der Kugel.

Folg. 1. Wenn eine Ebene MN durch den Endepunkt P eines auf ihr senkrechten Durchmessers PQ einer Kugel

gelegt wird, so schneidet sie die Kugel nicht mehr, sondern ist eine Berührungsebene; denn es wird

$$JO = \sqrt{(CJ)^2 - (CO)^2} = 0.$$

2) Außer dem Berührungspunkt P hat eine Berührungsebene sonst keinen Punkt mehr mit der Kugel gemein, denn für einen anderen Punkt H der Ebene MN wird

CPH = R; (§. 139.) daher im

△ HCP. CH > CP, also

H außerhalb der Kugel.

3) Eine Gerade aus dem Mittelpunkte C der Kugel durch den Mittelpunkt O eines Kugelkreises, oder durch den Berührungspunkt P einer Berührungsebene steht auf dieser Ebene und auf der Ebene des Kugelkreises senkrecht.

4) Eine im Mittelpunkte O eines Kugelkreises oder im Berührungspunkte einer Berührungsebene einer Kugel errichtete Senkrechte geht durch den Mittelpunkt der Kugel.

5) Durch jede zwei Punkte der Kugelfläche kann ein größter Kreis gelegt werden. Denn durch jede zwei solche Punkte und den Mittelpunkt der Kugel kann eine Ebene gelegt werden.

§. 180.

Erklär. Der kleinere Bogen des größten Kreises zwischen zwei Punkten heißt ihre Entfernung auf der Kugelfläche.

§. 181.

Erklär. Ein Durchmesser PQ einer Kugel, der auf einem Kugelkreise DJE oder AGB im Mittelpunkte desselben senkrecht steht, heißt die Axe, und jeder ihrer beiden Endepunkte P und Q in der Kugelfläche ein Pol jenes Kugelkreises.

Folg. Wenn man aus dem Mittelpunkte der Kugel auf die Ebenen eines kleineren Kugelkreises DJE eine Senkrechte CO errichtet;

oder den Mittelpunkt der Kugel mit dem Mittelpunkte O des Kugelkreises, durch CO verbindet;

oder im Mittelpunkte dieses Kugelkreises auf seine Ebene eine Senkrechte CO errichtet,

und CO beiderseits bis an die Kugelfläche verlängert; so ist

PQ die Axe, und

jeder ihrer beiden Endepunkte P und Q ein Pol des Kugelkreises DJE;

denn jedesmal ist PQ ein Durchmesser der Kugel, der auf der Kreisebene DJE in ihrem Mittelpunkte senkrecht steht. (Fig. 178. §. 179. Folg. 3. 4.)

§. 182.

Erklär. Kugelschnitte, deren Ebenen parallel sind, heissen Parallelkreise.

Folg. 1) Zwei Kugelkreise DJE und FVZ, welche (Fig. 144.) einerlei Pole P und Q, oder eine gemeinschaftliche Axe haben, sind Parallelkreise;

denn die gemeinschaftliche Axe steht auf beiden Kreisebenen senkrecht.

2) Zwei Parallelkreise DJE und FVZ haben eine gemeinschaftliche Axe und einerlei Pole;

denn ist PQ die Axe von DJE, so steht sie in O senkrecht auf, und geht durch den Mittelpunkt der Kugel. (§. 181.) Sie steht darum auch senkrecht auf der parallelen Kreisebene FVZ, und geht durch ihren Mittelpunkt. (§. 178.)

3) Wenn sich ein Halbkreis PAQ um seinen Durchmesser PQ dreht, so beschreibt er eine Kugel, der auf PQ senkrechte Halbmesser CA einen größten Kugelkreis, und daher der Quadrant AQ eine Halbkugel.

4) Die Kugel kann als ein regulärer Körper von unendlich vielen und unendlich kleinen Seitenflächen betrachtet werden.

Dritter Abschnitt.

Von der Gleichheit und den Verhältnissen der Körper.

§. 183.

Lehrs. Ein Prisma ist durch eine Grundfläche ABCD und durch eine Nebenseite AE und deren Neigung zur Grundfläche vollkommen bestimmt. (Fig. 136.)

Bew. Durch die Grundfläche ABCD ist auch die gegenüberstehende congruente Grundfläche EFGH, durch die Länge und Neigung der Seite AE auch die gleiche Länge und Neigung aller übrigen mit AE parallelen Nebenseiten BF, CG, DH, daher auch die Lage der Grundfläche EFGH, so wie die Größe, Lage und Gestalt aller Seitenflächen, mithin das ganze Prisma vollkommen bestimmt.

Folg. 1. Durch die Grundfläche ABCD und eine Seitenfläche ABEF und deren Neigung zur Grundfläche ist das Prisma auch vollkommen bestimmt; denn dadurch ist auch die Größe und Neigung der Nebenseite AE bestimmt.

Folg. 2. Zwei Prismen sind congruent, wenn sie eine congruente Grund- und Seitenfläche, und überdieß einen gleichen Neigungswinkel dieser Ebenen haben.

§. 184.

Aufg. Aus der gegebenen Grundfläche ABCD, einer Nebenseite AE und deren Neigung zur Grundfläche ein Prisma zu verzeichnen.

Aufl. Zur Uebung. (Fig. 136.)

§. 185.

Lehrs. Eine Pyramide (Fig. 141.) ist durch die Grundfläche ABCD, und durch eine Seite AK und deren Neigung zur Grundfläche vollkommen bestimmt.

Bew. Denn die Grundfläche ist gegeben; die Größe, Gestalt und Lage der Seitenflächen aber wird durch die gemeinschaftliche Spitze K, und diese Spitze K durch die Länge der Seite AK bestimmt.

Folg. Congruenz der Pyramiden.

§. 186.

Lehrs. Eine abgekürzte Pyramide (Fig. 145.) ABCD EFGH ist von einem gleich hohen Prisma auf der Grundfläche ABCD um so weniger verschieden, je kleiner die Höhe der abgekürzten Pyramide ist.

Bew. Es ist ABCD ∽ EFGH;

daher $ABCD : EFGH = (AB)^2 : (EF)^2$
$= (BC)^2 : (FG)^2$ u. s. w.

Nun ist auch $ABCD : EFGH = (KL)^2 : (KO)^2$ (§. 172. Folg. 1.)

folglich $\left.\begin{matrix} AB : EF \\ BC : FG \\ \text{u. s. w.} \end{matrix}\right\} = KL : KO$

Je kleiner nun $LO = KL - KO$ wird, desto mehr nähert sich das Verhältniß
KL : KO dem Verhältnisse
1 : 1;
desto näher kommen also auch die Seiten EF, FG, GH und EH der oberen Grundfläche ihren Parallelen, d. i. den Seiten AB, BC, CD und AD der unteren Grundfläche.

Die beiden ähnlichen Grundflächen sind demnach immer weniger an Größe verschieden, die Seitenflächen oder Trapezen nähern sich immer mehr Parallelogrammen, folglich u. s. w.

Folg. 1) Die abgekürzte Pyramide, deren Höhe unendlich klein ist, verwandelt sich in ein Prisma von der nämlichen Höhe und Grundfläche. Denn die beiden Grundflächen werden dann congruent, die Seitenflächen aber Parallelogramme.

2) Der abgekürzte Kegel, dessen Höhe unendlich klein ist, verwandelt sich in einen Cylinder von der nämlichen Grundfläche und Höhe.

§. 187.

Lehrs. Wenn man im Prisma eine Seite AE in mehrere gleiche Theile AK, KO, OE theilt, und durch alle Theilungspunkte Parallelebenen zur Grundfläche legt, so wird das ganze Prisma in eben so viele congruente Prismen getheilt. (Fig. 146.)

Bew. Da nach §. 165. jede Durchschnittsfigur mit der Grundfläche congruent und jeder Abschnitt der Seitenfläche ein Parallelogramm ist, so sind AM, KQ und OG Prismen.

Nun ist AK = KO = OE; (ex hyp.)
EOP = OKL = KAB, (§. 54. Folg. 1.)
daher sind die Seitenflächen AL, KP und OF congruent.

Da ferner die Seitenflächen zusammen die Seitenfläche AF vom Prisma ausmachen, und in ihr liegen, so haben sie alle zu ihren Grundflächen gleiche Neigungswinkel, folglich sind die Prismen AM, KQ, OG congruent. (§. 183. Folg. 2.)

Folg. Die Linie AK ist ein aliquoter Theil der Linie AE, und das Prisma AM ein aliquoter Theil vom Prisma AG.

Ist nun $AK = \frac{1}{m} AE$, so ist auch

$$\text{Prism. } AM = \frac{1}{m} \text{ Prism. } AG.$$

Nun ist $\frac{1}{m} AE : \frac{1}{m} \text{Prism. } AG = AE : \text{Prism. } AG$, folglich auch

$$AK : \text{Prism. } AM = AE : \text{Prism. } AG.$$

oder $\text{Prism. } AM : \text{Prism. } AG = AK : AE$.

§. 188.

Lehrs. Wenn das Prisma AG durch eine Ebene KM mit der Grundfläche AC parallel durchschnitten wird, so verhalten sich die beiden Prismen, wie ihre Seiten oder Höhen; d. i. (Fig. 146.)

$$\text{Prism. AM} : \text{Prism. AG} = \text{DN} : \text{DH}$$
$$= \text{SJ} : \text{HJ}.$$

Bew. Es ist Prism. AM : Prism. AG = DN : DH. (§. 187. Folg.)

Bestimmt man die Höhe HJ, so durchschneidet die Ebene DHJ auch die Ebene KM,
und es ist SN ♯ DJ; daher

DH : DH = SJ : HS; (§. 81.) folglich
Pr. AM : Pr. AG = SJ : HS.

§. 189.

Lehrs. Zwei Prismen von gleichen Höhen und Grundflächen sind gleich; (Fig. 146.)
d. i. wenn HJ = hi, und ABCD = acd ist,
so ist Pr. AG = Pr. ag.

Bew. Man nehme SJ = si von beliebiger Länge, und lege in beiden Prismen durch S und s Parallelebenen zur Grundfläche;

$$\left.\begin{array}{l}\text{so ist Pr. AG : Pr. AM = HJ : JS} \\ \text{Pr. ag : Pr. am = hi : is;}\end{array}\right\} (\text{§. 188.})$$

folglich Pr. AG : Pr. AM = Pr. ag. : Pr. am.

Diese Proportion ist wahr, man mag SJ = si so klein setzen, als man will; setzt man SJ = si = o, so verwandeln sich die Prismen AM, am in die Grundflächen ABCD, acd; und es wird

Pr. AG : ABCD = Pr. ag : acd;
da nun ABCD = acd ist, (ex hyp.)
so wird Pr. AG = Pr. ag.

§. 190.

Lehrs. Durch die Grundfläche ABD, Größe und Lage der Axe CO ist ein Cylinder vollkommen bestimmt. (Fig. 139.)

Bew. Durch O ist die Lage, und durch die Grundfläche ABD die Größe des Kreises EFG, mithin auch die Größe und Lage der krummen Seitenfläche, folglich der ganze Cylinder bestimmt.

Folg. Cylinder von gleichen Grundflächen, wenn ihre Axen gleich sind, und gegen die Grundfläche einerlei Neigung haben, sind congruent.

2) Cylinder von gleichen Grundflächen und Höhen sind gleich. (§ 169. Folg. 4.)

§. 191.

Lehrs. Pyramiden von gleichen Grundflächen und Höhen sind gleich; (Fig. 145.)

wenn ABCD = abc und KL = kl ist,

so ist Pyr. ABCDK = Pyr. abck.

Bew. Man stelle sich die beiden Höhen KL und *kl in* unendlich viele gleiche Theile getheilt, und durch alle Theilungspunkte Parallelebenen zur Grundfläche vor; so bestehen beide Pyramiden aus unendlich vielen abgekürzten Pyramiden, welche Prismen gleich sind. (§. 186. Folg. 1.)

Ferner ist

$$EFGH : ABCD = (KO)^2 : (KL)^2$$
$$feg : abc = (ko)^2 : (kl)^2;$$

folglich EFGH : ABCD = feg : abc,

da nun ABCD = abc ist, (ex hyp.)

so wird EFGH = feg;

eben so MNPS = mnps; u. s. w.

folglich haben in beiden Pyramiden die kleinen Prismen der Ordnung nach gleiche Grundflächen und Höhen, und sind daher gleich; (§. 189.)

d. i. Pr. AG = Pr. bg

Pr. EM = Pr. em. u. s. w.

Nun bestehen die beiden Pyramiden aus gleich viel solchen gleichen Prismen, folglich sind sie gleich.

Folg. Zwei Kegel, oder auch ein Kegel und eine Pyramide von gleichen Grundflächen und Höhen sind gleich. (§. 175. Folg. 8.)

§. 192.

Lehrs. Jede dreiseitige Pyramide ABCO (Fig. 147.) ist der dritte Theil eines dreiseitigen Prisma von der nämlichen Grundfläche und Höhe.

Bew. Man lege durch O eine Ebene DOE parallel zu ABC, ziehe in den erweiterten Ebenen ABO und CBO die Linien AD und CE parallel zu BO bis an die Ebene DOE, und lege noch durch die Parallelen AD und CE eine Ebene, so hat man ein dreiseitiges Prisma ABCDOE, welches mit der Pyramide ABCO einerlei Grundfläche und Höhe hat.

Dann wird

$$\text{Pyr. ABCO} = \tfrac{1}{3}\ \text{Prism. ABCDOE}.$$

Denn legt man noch durch C, O, D eine Ebene, so erhält man die drei Pyramiden ABCO, ACDO und DCEO, von welchen die erste und dritte mit dem Prisma einerlei Höhe hat.

Nun ist 1) Pyr. ABCO = Pyr. ACDO, denn beide haben ihre gemeinschaftliche Spitze in C, folglich gleiche Höhe, (§. 140. Folg. 1) und ihre Grundflächen sind die (nach §. 59. Folg. 3.) congruenten Dreiecke AOB und AOD (§. 191.)

Dann ist

$$2)\ \text{Pyr. ACDO} = \text{Pyr. DCEO};$$

denn die congruenten △ △ ADC und DCE sind die Grundflächen dieser Pyramiden, und die gemeinschaftliche Spitze derselben liegt in O; folglich wird

$$3)\ \text{Pyr. ABCO} = \text{Pyr. ACDO} = \text{Pyr. DCEO}.$$

Nun ist

$$\text{Prism. ABCDOE} = \text{Pyr. ABCO} + \text{Pyr. ACDO} + \text{Pyr. DCEO}$$

$= 3$ Pyr. ABCO; daher

$\frac{1}{3}$ Prism. ABCDOE $=$ Pyr. ABCO.

Folg. 1) Eine Pyramide p ist überhaupt der dritte Theil eines jeden Prisma P, welches mit ihr eine gleiche Höhe A und eine gleiche Grundfläche B hat; oder

$$p = \frac{1}{3} P.$$

Denn es sey p^1 eine dreiseitige Pyramide und P^1 ein dreiseitiges Prisma von der Höhe A und Grundfläche B, so ist

$$P^1 = P; \text{ (§. 189.)}$$
und $$p^1 = p; \text{ (§. 191.)}$$
Nun ist $$p^1 = \frac{1}{3} P^1 \text{ (Lehrs.)}$$
folglich $$p = \frac{1}{3} P.$$

Folg. 2. Der Kegel ist der dritte Theil eines Cylinders oder Prisma von gleicher Grundfläche und Höhe.

§. 193.

Lehrs. Durch die Grundfläche ABD, (Fig. 143.) die Axe KC nebst ihrer Neigung gegen die Grundfläche ist der Kegel vollkommen bestimmt.

Bew. Durch die Grundfläche, und durch die Lage und Größe der Axe, ist die Spitze K, und durch K für jeden Punkt B an der Grundfläche die Linie KB, mithin die ganze krumme Seitenfläche, und somit der ganze Kegel selbst bestimmt.

Folg. Kegeln von gleichen Grundflächen, Axen und Neigungswinkeln der Axen zur Grundfläche sind congruent.

Vierter Abschnitt.

Von der Berechnung und Ausmessung geometrischer Körper.

§. 194.

Lehrs. Wenn die Seite ab des Würfels ag (Fig. 148.) zu den Seiten des senkrechten Parallelepipedums AG ein solches Verhältniß hat, daß ab in der Länge AB m mal, in der Breite BC n mal, und in der Höhe AE p mal enthalten ist, so ist der Würfel ag im senkrechten Parallelepipedum AG so oft enthalten, als 1 im Produkte m. n. p; d. h. m. n. p mal.

Bew. Wenn ab in der Seite AB m mal enthalten ist, so läßt sich der Würfel ag längst AB m mal im senkrechten Parallelopipedum AG nebeneinander legen; mithin ist

$$\text{Parallp. AM} = \text{m. Cub. ag.}$$

Dieses senkrechte Parallelopipedum AM läßt sich im gegebenen AG auf der Grundfläche AC so oft nebeneinander legen, als die Seite ab oder bc des Würfels ag in BC enthalten ist, also n mal; mithin ist

$$\text{Parallp. AN} = \text{n. Parallp. AM}$$
$$= \text{n. m. Cub. ag.}$$

Das senkrechte Parallelopipedum AN läßt sich endlich im gegebenen so oft aufeinander setzen, als die Seite ab oder ae des Würfels ag in der Höhe AE enthalten ist, d. i. pmal; mithin wird

$$\text{Parallp. AG} = \text{p. Parallp. AN}$$
$$= \text{p. n. m. Cub. ag.}$$

§. 195.

Erklär. 1) Einen Körper ausmessen, heißt den körperlichen Inhalt desselben bestimmen, d. i. die Zahl angeben, wie oft das gebrauchte Maß im Körper enthalten ist.

2) Die Größen, womit Körper gemessen werden sollen, müssen von derselben Art, und daher selbst Körper von bestimmter Größe und Gestalt seyn. Man nimmt hiezu Würfel, in welchen jede Seite einem bekannten Längenmaße gleich ist.

Daher heißt den Inhalt eines Körpers angeben, denselben kubiren.

3) Die Grundeinheit des Körpermaßes ist der Kubikfuß, ein Kubus, an welchem jede Seite einen Fuß lang ist.

§. 196.

Lehrs. Der körperliche Inhalt eines senkrechten Parallelopipedums wird erhalten, wenn man die Zahlen multiplizirt, welche man erhält, wenn man Länge, Breite und Höhe desselben mit einerlei Maße mißt; oder es ist

Parallp. = A. B. H.

Bew. Im §. 194. ist

Parallp. = m. n. p. Cub. ag.

Ist nun Cub. ag. (Fig. 148.) die Einheit des gebrauchten Maßes (§. 195. Nro. 3.), so wird

Parallp. = m. n. p.

Nun sind m, n und p die Zahlen, welche man erhält, wenn man Länge, Breite und Höhe mit einer Seite von ag, d. i. mit einerlei Maße mißt. Bezeichnet man dieselben mit A, B und H, so wird

Parallp. = A. B. H.

Folg. 1) Da das Produkt der Länge und Breite den Inhalt der Grundfläche bestimmt, (§. 121.) so wird, wenn man (A. B) mit G bezeichnet,

Parallp. = G. H,

d. h. der körperliche Inhalt eines senkrechten Parallelopipedums ist gleich dem Produkte der Grundfläche und Höhe.

Folg. 2) Der körperliche Inhalt eines Würfels ist

$$\text{Cub.} = A^3;$$

wenn A eine in Zahlen bestimmte Seite desselben bezeichnet.

§. 197.

Aufg. Den Kubikinhalt eines Prisma oder Cylinders zu finden.

Aufl. Man berechne nach der Anweisung der Planimetrie den Inhalt der Grundfläche, und multiplizire diesen mit der Höhe; oder es ist

$$\left.\begin{array}{l}\text{Prism.}\\ \text{Cyl.}\end{array}\right\} = G.\ H.$$

Bew. Jedes Prisma P^{I} und jeder Cylinder C^{I} ist einem Parallelopipedum P von gleicher Grundfläche und Höhe gleich; (§. 189.)

Nun ist $\text{Parallp. } P = A.\ B.\ H.$ (§. 196.)

Da nun $\text{Prism. } P^{I} = \text{Parallp. } P$

und $\text{Cyl. } C^{I} = \text{Parallp. } P$ ist,

so wird $\left.\begin{array}{l}\text{Prism. } P^{I}\\ \text{Cyl. } C^{I}\end{array}\right\} = A.\ B.\ H.$

$= G.\ H.$ (§. 196. Folg. 1.)

Folg. 1) Wenn man den körperlichen Inhalt eines Prisma oder Cylinders durch die Höhe dividirt, so bekömmt man die Grundfläche; wenn man aber mit der Grundfläche dividirt, so erhält man die Höhe; d. i.

$$\frac{\text{Prism.}}{H} = \frac{\text{Cyl.}}{H} = G \text{ und}$$

$$\frac{\text{Prism.}}{G} = \frac{\text{Cyl.}}{G} = H.$$

Folg. 2) Prismen und Cylinder stehen im zusammengesetzten Verhältnisse ihrer Grundflächen und Höhen; denn es ist

$\text{Prism. oder Cyl.} = G.\ H$; und

$\text{prism. oder cyl.} = g.\ h$; also

$\text{Prism. (Cyl.)} : \text{prism. (cyl.)} = G.\ H : g.\ h.$

Folg. 3) Prismen und Cylinder verhalten sich bei gleichen Grundflächen, wie ihre Höhen, und bei gleichen Höhen, wie ihre Grundflächen; denn dann wird aus Folg. 1.

$$\text{Pr. (Cyl.)} : \text{pr. (cyl.)} = H : h$$ und

$$\text{Pr. (Cyl.)} : \text{pr. (cyl.)} = G : g.$$

Folg. 4) Wenn zwei Cylinder oder Prismen gleich sind, so sind ihre Grundflächen und Höhen umgekehrt proportionirt; denn aus

$$\text{Pr. (Cyl.)} : \text{pr. (cyl.)} = G. H : g. h$$ wird

$$GH = gh$$ und daher

$$G : g = h : H.$$

Folg. 5) Zwei Cylinder von gleicher Höhe verhalten sich, wie die Quadrate der Durch- oder Halbmesser ihrer Grundflächen; denn es wird

$$\text{Cyl.} : \text{cyl.} = G : g$$

$$= \frac{D^2 \pi}{4} : \frac{d^2 \pi}{4} = R^2 \pi : r^2 \pi,$$ oder

$$= D^2 : d^2 = R^2 : r^2.$$

Folg. 6) Der Kubikinhalt eines Cylinders ist auch

$$\text{Cyl.} = \tfrac{1}{4} D^2 \pi. H = R^2. \pi. H.$$

Folg. 7) Wenn über zwei concentrischen Kreisen zwei Cylinder stehen, die einerlei Höhe haben, so ist der Kubikinhalt des cylindrischen Ringes oder

$$\text{Annul.} = \text{Cyl.} - \text{cyl.}$$

$$= H. \pi (R + r) (R - r.)$$

§. 198.

Aufg. Die Oberfläche eines Prisma zu finden.

Aufl. Man berechne den Inhalt der einen Grundfläche, und den Inhalt einer jeden Seitenfläche, und addire die Summe der letzteren zum doppelten Inhalte der ersteren.

Folg. Die Oberfläche eines Würfels ist

$$\text{Sup. Cub.} = 6 A^2,$$

wenn A die Länge einer Seite des Würfels ausdrückt.

§. 199.

Lehrs. Die krumme Seitenfläche eines senkrechten Cylinders ist so groß, als ein Rechteck, dessen Grundseite der Peripherie der Grundfläche und dessen Nebenseite der Höhe des Cylinders gleich ist.

Bew. Die krumme Seitenfläche eines Cylinders besteht aus unendlich vielen Parallelogramme auf den unendlich kleinen Seiten seiner Grundfläche. (§. 169. Folg. 4)

Ist nun der Cylinder senkrecht, so sind alle diese Parallelogramme Rechtecke und haben eine Seite, oder die Höhe des Cylinders zu ihrer gemeinschaftlichen Höhe, und ihre Grundlinien zusammengenommen, machen die Peripherie der Grundfläche des Cylinders aus; folglich u. s. w. (§. 135. II.)

Folg. 1) Ist D Durchmesser, und R Halbmesser der Grundfläche, und H die Höhe des senkrechten Cylinders, so ist die krumme Seitenfläche

$$= D.\ \pi.\ H = 2\ R\ \pi.\ H.$$

Folg. 2) Daher wird die Oberfläche eines Cylinders, oder

$$\begin{aligned} \text{Sup. Cyl.} &= 2\ R^2\ \pi + 2\ R\ \pi\ H \\ &= 2\ R\ \pi\ (R + H) \\ &= \tfrac{1}{2}\ D^2\ \pi + 2\ D.\ \pi.\ H \\ &= D.\ \pi\ (\tfrac{1}{2}\ D + H.) \end{aligned}$$

§. 200.

Lehrs. Die krumme Seitenfläche eines gleichseitigen Kegels ist so groß, als ein Dreieck, welches zur Grundseite die Peripherie der Grundfläche, und zur Höhe die Seite des Kegels hat.

Bew. Da sich der Kegel als eine Pyramide von unendlich vielen Seiten betrachten läßt, so besteht die krumme Seitenfläche aus unendlich vielen Dreiecken, welche, wenn der Kegel gleichseitig ist, die Seite desselben zur gemeinschaftlichen Höhe haben, und deren Grundlinien zu-

sammengenommen die Peripherie der Grundfläche ausmachen, folglich (§. 116. Folg. 2.)

Folg. 1) Da im gleichseitigen Kegel alle Punkte der Peripherie der Grundfläche von der Spitze des Kegels gleich weit abstehen, so liegen alle diese Punkte in der Peripherie eines mit der Seite des Kegels beschriebenen Kreises, und die krumme Seitenfläche eines solchen Kegels ist dem Ausschnitte eines Kreises gleich, dessen Halbmesser der Seite des senkrechten Kegels und dessen Bogen der Peripherie der Grundfläche des Kegels gleich ist.

Folg. 2) Wenn L die Seite des gleichseitigen Kegels, D den Durchmesser und R den Halbmesser seiner Grundfläche bezeichnet, so ist die krumme Seitenfläche

$$= D.\ \pi.\ \tfrac{1}{2}\ L$$

$$= R.\ \pi.\ L.\ \text{(nach dem Lehrsatze.)}$$

Man erhält den nämlichen Ausdruck, wenn man diese krumme Seitenfläche als Kreisausschnitt nach §. 132. berechnet.

§. 201.

Aufg. Den Kubikinhalt einer Pyramide oder eines Kegels zu finden.

Aufl. $\text{Pyr. oder Con.} = \frac{G.\ H}{3}$

$$= \frac{G}{3} \cdot H$$

$$= G. \frac{H}{3}$$

Bew. Es ist

$$\text{Prism. } (G.\ H) = G.\ H$$

$$\text{Pyr. oder Con. } (G.\ H) = \tfrac{1}{3}.\ \text{Prism. } (G.\ H.)$$

folglich $\text{Pyr. oder Con. } (G.\ H) = \frac{1}{3}\ G.\ H.$

Folg. 1) $\frac{\text{Pyr.}}{G}$ oder $\frac{\text{Con.}}{G} = H$, und

$$\frac{3.\ \text{Pyr.}}{H} \text{ oder } \frac{3\ \text{Con.}}{H} = G.$$

Folg. 2) Alle Sätze in §. 197. Folg. 2. 3. und 4. gelten auch von der Pyramide und dem Kegel.

Folg. 3) Zwei Kegel von gleicher Höhe verhalten sich, wie die Quadrate der Halb- oder Durchmesser ihrer Grundflächen. (§. 197. Folg. 5.)

Folg. 4) Der Kubikinhalt eines Kegels ist auch

$$\text{Con.} = \tfrac{1}{12}\, D^2.\, H.\, \pi, \text{ oder auch}$$
$$\text{Con.} = \tfrac{1}{3}\, R^2.\, H.\, \pi.$$

§. 202.

Aufg. Die Oberfläche einer Pyramide zu finden.

Aufl. Man berechne den Inhalt der Grundfläche und jeder Seitenfläche. Die Summe aller dieser Flächen gibt die ganze Oberfläche.

§. 203.

Aufg. Die Oberfläche eines gleichseitigen Kegels zu finden.

Aufl. Man berechne die Grundfläche, und (nach §. 200.) die krumme Seitenfläche; die Summe derselben gibt die gesuchte Oberfläche.

Folg. Ist L die Seite eines gleichseitigen Kegels so wird

$$\begin{aligned} \text{Sup.} &= \tfrac{1}{2}\, L.\, D.\, \pi + \tfrac{1}{4}\, D^2\, \pi \\ &= \tfrac{1}{2}\, D\, \pi\, (\tfrac{1}{2}\, D + L); \text{ oder auch} \\ \text{Sup.} &= R^2\, \pi + LR\, \pi \\ &= R\, \pi\, (R + L). \end{aligned}$$

§. 204.

Aufg. Den Kubikinhalt einer abgekürzten Pyramide aus den beiden gegebenen Grundflächen ABCD = B, EFGH = b, und ihrer Entfernung NO = a zu finden. (Fig. 141.)

Aufl. Es ist

$$\text{Pyr. dec.} = \tfrac{1}{3}\, a\, (B + \sqrt{Bb} + b).$$

Bew. Es sey die Höhe der ganzen Pyramide

$KN = x$, und

die Höhe der oberen abgeschnittenen Pyramide

$KO = y$; so wird

1) Pyr. detrunc. $= \frac{1}{3} B x - \frac{1}{3} b y$. (§. 201.)

Um nun die beiden unbekannten Größen x und y zu bestimmen, hat man

2) $B : b = x^2 : y^2$; (§. 172. Folg. 1.)

daher $y = x. \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{B}}$, und es wird

3) Pyr. decurt. $= \frac{1}{3} B. x - \frac{1}{3} b. x. \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{B}}$

$$= \frac{1}{3} x \left(\frac{B\sqrt{B} - b\sqrt{b}}{\sqrt{B}}.\right)$$

Um x zu finden, hat man

4) $x = a + y = a + x. \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{B}}$.

$$= \frac{a. \sqrt{B} + x\sqrt{b}}{\sqrt{B}}.$$

Aus dieser Gleichung findet man

5) $x = \frac{a. \sqrt{B}}{\sqrt{B} - \sqrt{b}}$. Folglich wird

6) Pyr. dec. $= \frac{1}{3}. \frac{a. \sqrt{B}}{\sqrt{B} - \sqrt{b}}. \left(\frac{B\sqrt{B} - b\sqrt{b}}{\sqrt{B}.}\right)$

$$= \frac{1}{3}. a \left(\frac{B. \sqrt{B} - b\sqrt{b}}{\sqrt{B} - \sqrt{b}}\right)$$

oder, wenn man die angezeigte Division vollzieht,

7) Pyr. dec. $= \frac{1}{3} a (B + \sqrt{Bb} + b.)$

Folg. Ist anstatt der beiden Grundflächen B und b eine Seite m der oberen und eine gleichliegende Seite M der unteren Grundfläche gegeben, so ist

$B : b = M^2 : m^2$, und

$b = \frac{B. m^2}{M^2}$; daher

Pyr. decur. $= \frac{1}{3} a B \left(1 + \frac{m}{M} + \frac{m^2}{M^2}\right)$.

§. 205.

Aufg. Den Kubikinhalt eines abgekürzten Kegels aus den gegebenen Halbmessern R, r der beiden Grundflächen B, b und ihrer Entfernung a zu finden.

Aufl. Con. detr. $= \frac{1}{3} a \pi (R^2 + R r + r^2.)$

Bew. Der abgekürzte Kegel wird betrachtet als eine abgekürzte Pyramide von unendlich vielen Seiten; daher wird

Con. detr. $= \frac{1}{3} a (B + \sqrt{B b} + b)$; (§. 204.)

Nun ist $B = R^2 \pi$, und

$b = r^2 \pi$; daher

Con. detr. $= \frac{1}{3} a \pi (R^2 + R r + r^2)$.

§. 206.

Aufg. Aus den beiden gegebenen Halbmessern der beiden Grundflächen und der Seite eines gleichseitigen abgekürzten Kegels AEGD (Fig. 143.) die Seite des hinweggeschnittenen Kegels und die Seite des ganzen Kegels zu finden.

Aufl. Es sey gegeben

$CA = R$,

$OE = r$,

$AE = e$;

gesucht wird $EK = x$ und

$AK = L$.

Es wird 1) $x = \frac{e. r}{R - r}$ und

2) $L = \frac{e. R}{R - r}$.

Bew. Im Axendreiecke AKD ist

EG ⫲ AD;

daher im △ AKC

$AK : EK = CA : OE$ und

$AK - EK : EK = CA - OE : OE$ oder

$AE : EK = CA - OE : OE$, d. i.

$$e : x = R - r : r, \text{ daher}$$

$$x = \frac{e.\ r}{R - r}.$$

Es ist $AK = AE + EK$, oder

$$= e + x; \text{ daher}$$

$$L = \frac{e.\ R}{R - r}.$$

§. 207.

Aufg. Aus den Radien R und r der beiden Grundflächen und der Seite e eines gleichseitigen abgekürzten Kegels (Fig. 143.) ADEG, die krumme Seitenfläche desselben zu finden.

Aufl. Bezeichnet man die Seite des ganzen Kegels mit L, und die Seite des abgeschnittenen mit x, so ist die Seitenfläche des abgekürzten Kegels

$$Pl. = e.\ \pi.\ (R + r.).$$

Bew. Diese Seitenfläche ist

$$Pl. = \tfrac{1}{2}\ L.\ 2\ R\ \pi - \tfrac{1}{2}\ x.\ 2\ r\ \pi.\ (\S.\ 200.)$$
$$= L.\ R\ \pi - x.\ r\ \pi,$$
$$= \pi\ (L\ R - x\ r).$$

Nun ist $L = \frac{e.\ R}{R - r}$ und

$$x = \frac{e.\ r}{R - r};$$

folglich wird

$$Pl. = \pi \left(\frac{e\ R^2 - e\ r^2}{R - r}\right)$$
$$= e.\ \pi \left(\frac{R^2 - r^2}{R - r}\right)$$
$$= e.\ \pi\ (R + r.)$$

Folg. 1) Daher wird die Oberfläche eines gleichseitigen abgekürzten Kegels, oder

$$Sup. = e.\ \pi\ (R + r) + R^2\ \pi + r^2\ \pi.$$
$$= e\ \pi\ (R + r) + \pi\ (R^2 + r^2).$$

Folg. 2) Wenn die obere Grundfläche der unteren unendlich nahe liegt, also e unendlich klein ist, so wird

$$R = r, \text{(§. 186. Folg. 2.)}$$

weil dann der abgekürzte Kegel sich in einen Cylinder von der nämlichen Grundfläche und Höhe verwandelt; daher wird die krumme Seitenfläche, oder

$$Pl. = 2\ R.\ \pi.\ e.$$

§. 208.

Lehrs. Der Streifen oder Gürtel an der Oberfläche der Kugel zwischen zwei Parallelkreisen FG, fg, die unendlich nahe aneinander liegen, ist der Seitenfläche eines abgekürzten Kegels gleich. (Fig. 149.)

Bew. Es sey DK die Axe der Parallelkreise, und AFDGBKA ein größter Kugelkreis.

Man ziehe in demselben den Radius CG und durch G eine Tangens, welche die Axe in T und die Linie feg in h schneidet.

Nun wird im rechtwinklichten $\triangle$ CGh

$$GCh = \frac{1}{\infty} \text{ daher}$$

$$ChG = CGh = R; \text{ mithin}$$

$$Ch = CG, \text{ d. h.}$$

h fällt auf einen Punkt der Peripherie des Kreises, folglich ist der unendlich kleine Bogen Gg ein Theilchen der Tangens.

Dreht sich nun der Halbkreis DBK um die Axe DK, so beschreibt er die Kugel; EG, eg beschreiben zwei unendlich nahe Parallelkreise; der Bogen Gg einen Streifen von der Oberfläche der Kugel, welcher zwischen diesen Parallelkreisen enthalten ist.

Dreht sich nun das rechtwinklichte $\triangle$ Teh um eben diese Axe TK, so beschreibt solches einen gleichseitigen Kegel, das Trapez EehG beschreibt einen abgekürzten Kegel, und Gh die Seitenfläche desselben.

Ist nun GH unendlich klein, so ist es mit dem Bogen Gg einerlei, folglich ist auch der unendlich schmale Streifen der Kugel zwischen den zwei Parallelkreisen mit der Seitenfläche eines abgekürzten Kegels einerlei.

§. 209.

Lehrs. Der Theil FDG von der Oberfläche der Kugel, (Fig. 149.) welcher über dem Kugelkreise FG liegt, ist einem Rechtecke gleich, welches die Peripherie eines größten Kugelkreises zur Grundseite und die Entfernung DE des Kugelkreises FG vom Pole D zur Höhe hat, oder es ist

$$FDG = 2R\,\pi.\,DE,$$

wenn R den Halbmesser der Kugel bezeichnet.

Bew. Unendlich nahe und parallel zum Kreise FG sey der Kugelkreis fg, so ist der unendlich kleine Bogen Gg ein Theilchen der Tangens durch G, und der zwischen beiden Parallelkreisen enthaltene Streif fFGg von der Oberfläche der Kugel die Seite eines abgekürzten Kegels (§. 208.) mithin

$$\text{Zona } fFGg = 2.\,EG.\,\pi.\,Gg. \quad (\text{§. 207.) Folg. 2.)}$$

Setzt man nun den Halbmesser der Kugel = R, jenen des kleinern Kugelkreises oder EG = y, den unendlich kleinen Bogen, oder das Theilchen der Tangens Gg = e, so ist

$$\text{Zona } fFGg = 2.\,y.\,\pi.\,e.$$

Nun ziehe man den Radius der Kugel CG und durch G mit der Axe DK die Parallele GJ, so wird

$$CGg = R = EGJ \text{ also}$$

$$EGC + CGJ = CGJ + JGg,$$

$$\text{und } EGC = JGg;$$

$$\text{daher } \triangle CEG \sim \triangle GJg,$$

$$\text{mithin } EG : CG = GJ : Gg \text{ d. i.}$$

$$y : R = GJ : e, \text{ daher}$$

$$e = \frac{R.\,GJ}{y}, \text{ folglich}$$

$$\text{Zona FfGg} = 2\,y.\,\pi.\,\frac{R.GJ}{y}$$
$$= 2\,\pi.\,R.\,Ee.$$

Nun stelle man sich die Linie DE in unendlich viele gleiche Theile, jeden = Ee = GJ getheilt vor, so wird die Oberfläche jenes Theiles der Kugel, welcher über dem Kreise FG liegt, in unendlich viele schmale Streifen getheilt, die alle einander gleich sind; denn 2 R π ist für alle einerlei, und eben so wird GJ = Ee für alle gleich angenommen.

Alle diese Streifen zusammen, oder die Oberfläche des Theiles FDG ist also

$$= 2\,R\,\pi.\,GJ + 2\,R\,\pi.\,GJ + \ldots\ldots$$
$$= 2\,R\,\pi.\,(GJ + GJ + \ldots.)$$
$$= 2\,R\,\pi.\,DE;$$

und dieses ist der Flächeninhalt eines Rechtecks, dessen Grundlinie 2 R π oder die Peripherie eines größten Kreises, und dessen Höhe DE die Entfernung des Poles D vom Kreise FG ist.

§. 210.

Aufg. Die Oberfläche einer Kugel zu finden.

Aufl. Die Oberfläche einer Kugel ist vier größten Kreisen gleich; oder

$$\text{Sup.} = 4\,R.^2\,\pi.$$

Bew. Die Oberfläche einer Halbkugel ist zwei größten Kreisen gleich, indem man

$$\text{ADB} = 2\,R.\,\pi.\,DC\ (\S.\,209.)$$
$$= 2\,R.^2\,\pi\ \text{erhält;}$$

daher die ganze Oberfläche, oder

$$\text{Sup.} = 4\,R.^2\,\pi.$$

Folg. 1) Der Streif oder Gürtel von der Oberfläche der Kugel zwischen zwei Parallelkreisen AB und FG ist einem Rechtecke gleich, dessen Grundseite die Peripherie eines größten Kreises und dessen Höhe die Entfernung dieser Kreise ist, oder

$$\text{Zona AFGB} = 2R\pi.\ EC.$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Denn } ADB = 2R\pi.\ DC.\\ \quad FDG = 2R\pi.\ DE\end{array}\right\}\ (\S.\ 209.)$$

$$\text{also } ADB - FDG = 2R\pi\ (DC - DE) \text{ oder}$$

$$\text{Zona AFGB} = 2R\pi.\ EC.$$

2) Die Oberflächen zweier Kugeln verhalten sich, wie die zweiten Potenzen ihrer Halbmesser;

denn $\text{Superf.} = 4R^2.\ \pi$, und

$\text{superf.} = 4r^2.\ \pi$; also

$\text{Sup.} : \text{sup.} = R^2 : r^2.$

§. 211.

Aufg. Aus dem Durch- oder Halbmesser einer Kugel den körperlichen Inhalt der Kugel zu finden.

Aufl. $\text{Sphaera} = \frac{4}{3}.\ R^3.\ \pi$

$= \frac{1}{6}\ D^3\ \pi.$

Bew. Die Kugel ist einer Pyramide gleich, welche die Oberfläche der Kugel zur Grundfläche und ihren Halbmesser zur Höhe hat.

I. Denn man kann sich die Oberfläche der Kugel in unendlich kleine Theile getheilt, und von allen Ecken dieser Theilchen nach dem Mittelpunkte der Kugel gerade Linien (Radien) gezogen vorstellen; jedes solche Theilchen wird dann eine Ebene (§. 182.) und kann als Grundfläche einer Pyramide, welche ihre Spitze im Mittelpunkte der Kugel folglich den Radius zur Höhe hat, betrachtet werden; diese Oberflächen nun aber machen zusammen die Oberfläche der Kugel, und die Pyramiden zusammen die Kugel aus.

II. Mehrere Pyramiden aber $P, P^I, P^{II} \ldots\ldots$ von der gleichen Höhe R, und den Grundflächen B, B^I, B^{II} sind zusammen einer Pyramide Π gleich, welche die nämliche Höhe R und eine Grundfläche B hat, welche der Summe aller Grundflächen $B, B^I, B^{II} \ldots\ldots$ gleich ist; denn zerlegt man die Grundfläche B der Pyramide Π in ihre Theile $B, B^I, B^{II} \ldots\ldots$ und zieht aus der Spitze der Pyra-

mide Π an alle Ecken dieser Theile gerade Linien, so wird die Pyramide Π in eben so viele Pyramiden getheilt, als die Grundfläche Theile hat. Diese Pyramiden haben eine gemeinschaftliche Spitze, folglich gleiche Höhe; (§. 140. Folg. 1.) ferner hat davon die erste mit P, die andere mit P^{I}, die dritte mit P^{II}.... gleiche Grundfläche und Höhe, sind also alle einander gleich; (§. 191.) folglich sind die ersteren zusammen der Summe der letzteren gleich.

Daher ist die Kugel einer Pyramide gleich, welche die Oberfläche derselben zur Grundfläche, und den Halbmesser zur Höhe hat; daher wird (§. 201.)

$$\begin{aligned} \text{Sphaera} &= \text{Superf.} \times \tfrac{1}{3} R \\ &= 4R^2.\ \pi.\ \tfrac{1}{3} R = \tfrac{4}{3} R^3.\ \pi \\ &= \tfrac{1}{6} D^3.\ \pi. \end{aligned}$$

Folg. 1) Zwei Kugeln verhalten sich wie die dritten Potenzen ihrer Durch- oder Halbmesser; denn

$$\begin{aligned} \text{Sph.} &= \tfrac{4}{3} R^3.\ \pi \text{ und} \\ \text{sph.} &= \tfrac{4}{3} r^3.\ \pi, \text{ daher} \\ \text{Sph.} : \text{sph.} &= R^3 : r^3 \\ &= D^3 : d^3. \end{aligned}$$

2) Auch ist

$$D = \sqrt[3]{\frac{6\ \text{Sphaer.}}{\pi}}$$; d. h. man kann aus dem körperlichen Inhalte der Kugel den Durchmesser derselben finden.

§. 212.

Lehrs. Ein Cylinder, eine Kugel, und ein Kegel, wenn ersterer und letzterer zur Grundfläche einen größten Kreis und zur Höhe den Durchmesser der Kugel hat, verhalten sich nach der Ordnung, wie die Zahlen 3, 2, 1; d. i.

$$\text{Cyl.} : \text{Sph.} : \text{Con.} = 3 : 2 : 1.$$

Bew. $\text{Cyl.} = 2 R^3 \pi.$ (§. 197.)

$\text{Sph.} = \tfrac{4}{3} R^3 \pi.$ (§. 211.) also

$\text{Cyl.} : \text{Sph.} = 3 : 2$

Ferner Con. $= \frac{2}{3} R^3 \pi$ (§. 201.) also
Cyl. : Con. $= 3 : 1$ und
Sph. : Con. $= 2 : 1$.

§. 213.

Anwendung auf die Erde.

Die Erde hat zwar keine vollkommene Kugelgestalt; sie wird jedoch bei der Berechnung ihres Umfangs, ihres Durchmessers, ihrer Oberfläche und ihres körperlichen Inhaltes als eine Kugel betrachtet.

I. Berechnung des Umfanges und Durchmessers der Erde.

Der Umfang der Erde ist ein größter Kreis, der in 360° getheilt wird.

Da nun die mittlere Länge eines Grades durch Messungen $= 15$ geogr. Meilen gefunden wurde, so wird der Umfang oder Per. $= 15 \times 360 = 5400$ geogr. M.

Nach §. 111. Folg. ist

$$P = D. \pi = 2 R. \pi, \text{ daher}$$

$$D = \frac{P}{\pi} \text{ und}$$

$$R = \frac{P}{2\pi}.$$

Daher wird der Durchmesser der Erde, oder

$$D = \frac{5400}{3{,}141} = 1719{,}197 \text{ geogr. M.};$$

daher der Halbmesser, oder

$$R = 859{,}5985 \text{ geogr. M.}$$

II. Berechnung der Oberfläche und des körperlichen Inhalts der Erde.

Es ist (nach §. 210.) die Oberfläche einer Kugel, oder

$$\text{Superf.} = 4 R^2. \pi, \text{ daher}$$

wird die Oberfläche der Erde, oder

$$\text{Sup. T.} = 9^{\text{I}}\ 282\ 600 \text{ geogr. Quadrat M.}$$

Es ist nach §. 211. der körperliche Inhalt einer Kugel oder

$$\text{Sph.} = \frac{4}{3} . R^3 . \pi = \tfrac{1}{6} D^3 \pi ;$$

Daher wird der körperliche Inhalt der Erde, oder

Sph. = 2659'311575 geogr. Kubik M.

*) Zur Berechnung wählt man die bequemeren Formeln.

1) Sup. = Per. $\times$ D;

denn es ist Per. D. = 2 R π. 2R = 4R² π = Sup.;

und

$$2)\ \text{Sph.} = \frac{D^2. \text{Per.}}{6};$$

denn es ist $\frac{D^2. \text{Per.}}{6} = \frac{D^2. D \pi}{6} = \frac{1}{6} D^3 . \pi$.

§. 214.

Einige Aufgaben über Verwandlung und Theilung einiger geometrischer Körper.

I. Einen gegebenen Würfel zu verdoppeln. (Das Delische Problem.)

Aufl. Man messe eine Seite a des gegebenen Würfels, und multiplizire sie mit $\sqrt[3]{2}$, oder es ist die Seite des doppelten Würfels

$x = a \sqrt[3]{2}$; denn es ist

$x^3 = 2. (a)^3$; daher

$x = a \sqrt[3]{2}$.

II. Jeden geometrischen Körper in einen Würfel zu verwandeln.

Aufl. Man berechne den Kubikinhalt P des gegebenen Körpers, so ist nach der Forderung, wenn y die Seite des gesuchten Würfels bezeichnet,

$y^3 = P$, daher

$y = \sqrt[3]{P}$.

III. Eine abgekürzte Pyramide (Fig. 151.) ABCD MNOP nach einem gewissen Verhältnisse parallel zur Grundfläche zu theilen.

Aufl. Das Stück MNOPEFGH, welches abgeschnitten werden soll, sei der $\frac{m}{n}$te Theil der gegebenen abgekürzten Pyramide.

Setzt man nun

$$AB = L,$$
$$MN = l,$$
und $$Ll = a,$$

so wird, wenn EF = z ist, die gesuchte Höhe des abzuschneidenden Stückes,

$$Ji = y = \frac{a(z-l)}{L-l},$$

wenn man AB, MN und LJ gemessen hat.

Bew. Man setze noch die unbekannten Größen

$$KJ = x, \text{ und}$$
$$EFGH = Y,$$

so wird

$$\text{Pyr. dec ABMN} = \tfrac{1}{3}\, aB\left(1 + \frac{l}{L} + \frac{l^2}{L^2}\right),$$

und der $\frac{m}{n}$te Theil derselben, oder

$$\frac{m}{n}\,\text{Pyr. dec. ABMN} = \frac{m\,a\,B}{3\,n}\left(1 + \frac{l}{L} + \frac{l^2}{L^2}\right),$$

und

$$\text{Pyr. dec. EFOP} = \tfrac{1}{3}\, y.\, Y\left(1 + \frac{l}{z} + \frac{l^2}{z^2}\right).$$

Daher wird

$$\frac{m\,a\,B}{3\,n}\left(1 + \frac{l}{L} + \frac{l^2}{L^2}\right) = \tfrac{1}{3}\, y.\, Y.\left(1 + \frac{l}{z} + \frac{l^2}{z^2}\right);$$

Es ist aber EFGH ∽ ABCD, oder

$$Y \backsim B, \text{ daher}$$
$$Y : B = z^2 : L^2, \text{ und}$$

$$Y = \frac{B. z^2}{L^2}; \text{ folglich}$$

$$\frac{m a B}{3n}\left(1 + \frac{l}{L} + \frac{l^2}{L^2}\right) = \frac{y. B. z^2}{3 L^2}\left(1 + \frac{l}{z} + \frac{l^2}{z^2}\right),$$

$$m\ a\ L^2\left(1 + \frac{l}{L} + \frac{l^2}{L^2}\right) = n. y. z^2\left(1 + \frac{l}{z} + \frac{l^2}{z^2}\right),$$

$$ma\ (L^2 + Ll + l^2) = n. y. (z^2 + z\,l + l^2). \quad (*)$$

Ferner ist im △ AKB

$$BK : NK = AB : MN,$$

und im △ BKL

$$BK : NK = LK : JK;$$

folglich $AB : MN = LK : JK$; d. i.

$$L : l = a + x : x; \text{ daher}$$

$$Lx = la + lx, \text{ und}$$

$$x = \frac{L\,a}{L - l}.$$

Eben so ist im △ EKF

$$FK : KN = EF : MN,$$

und im △ FKi

$$FK : KN = iK : JK;$$

folglich $EF : MN = iK : JK$; d. i.

$$z : l = x + y : x; \text{ daher}$$

$$x = \frac{l\,.\,y}{z - l}; \text{ daher wird}$$

$$\frac{l\,.\,a}{L - l} = \frac{l\,.\,y}{z - l} \text{ und}$$

$$y = \frac{a\,.\,(z - l)}{L - l}.$$

Substituirt man diesen Werth von y in der Gleichung (*) so wird

$$m\,a\ (L^2 + L\,l + l^2) = a\,.\,n\left(\frac{z - l}{L - l}\right) \times (z^2 + z\,.\,l + l^2);$$

$$m\ (L^3 - l^3) = n\ (z^3 - l^3);$$

$$mL^3 - ml^3 = nz^3 - nl^3; \text{ und}$$

$$z = \sqrt{\left(\frac{mL^3 + (n-m)\,l^3}{n}\right)}.$$

Mit z kann man nun y finden.

Folg. 1) Wenn nicht die Höhe LJ, sondern die Seite BN der abgekürzten Pyramide gegeben, oder gemessen ist, und man sucht die Seite FN des abzuschneidenden Stückes, so ist auch diese, oder

$$FN = \frac{a\,(z - l)}{L - l}.$$

Denn setzt man

$$BN = a,$$
$$KN = x, \text{ und}$$
$$FN = y; \text{ so wird}$$
$$BK : KN = AB : MN, \text{ d. i.}$$
$$a + x : x = L : l; \text{ daher}$$
$$x = \frac{a.\,l}{L - l}.$$

Dann ist auch

$$FK : KN = EF : MN; \text{ d. i.}$$
$$y + x : x = z : l; \text{ und}$$
$$x = \frac{l.\,y}{z - l}. \text{ Daher wird}$$
$$\frac{a.\,l}{L - l} = \frac{l.\,y}{z - l} \text{ und}$$
$$y = \frac{a.\,(z - l)}{L - l}.$$

Folg. 2) In einem abgekürzten Kegel ist L der Halbmesser R der größeren Grundfläche, l der Halbmesser r der kleineren, und

$$z = \sqrt[3]{\left(\frac{m\,R^3 + (n-m)\,r^3}{n}\right)}.$$

ist der Halbmesser der Durchschnittsfläche, welche den $\frac{m}{n}$ten Theil abschneidet.

Folg. 3) Soll eine abgekürzte Pyramide oder ein abgekürzter Kegel in mehrere Theile nach einem gegebenen Verhältnisse getheilt werden, z. B. nach dem Verhältnisse der Zahlen 2, 5, 7; so nehme man

$n = 2 + 5 + 7 = 14$, und zuerst

$m = 2$; dann

$m = 5$, und zuletzt

$m = 7$; d. h. man schneide zuerst $\frac{2}{14}$ Theile ab, dann von dem noch übrigen Stücke $\frac{5}{14}$, so bleiben noch $\frac{7}{14}$ Theile.

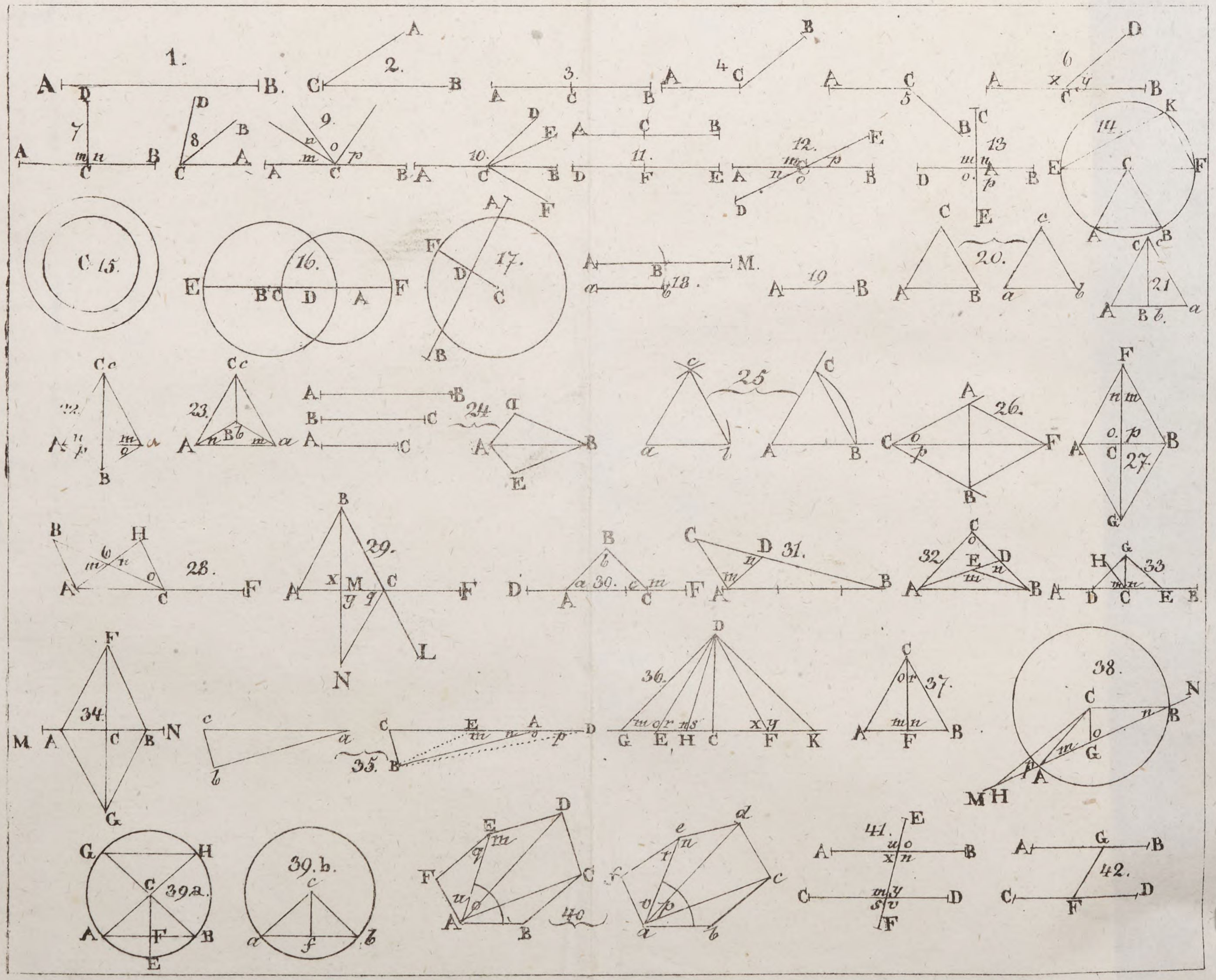
Druckfehler und Verbesserungen.

Seite 24 Zeile 2 u. 3. lese man F anstatt C.
— 26 — 24 — — n anstatt o.
— 35 — 22 — — Seite von AB.
— 36 — 12 — — (Lehrs.) anstatt (ex hyp.)
— 36 — 19 — — (Folg. 2.) anstatt (Folg. 3.)
— 36 — 31 ist umgekehrt wegzustreichen.
— 37 Z. 1 u. 2 v. u. l. man BAC anstatt ABC.
— 45 — 6 v. u. — — $\frac{b}{2^m}$ anstatt $\frac{b}{2}$
— 51 — 18 v. u. — — (§. 40.) anstatt (§. 26.)
— 63 — 10 u. 12 v. u. lese man BD anstatt BC.
— 64 — 1 v. u. l. man (§. 40.) anstatt (§. 36. Folg. 6.)
— 67 — 15 v. u. — — (§. 93. Folg. 2.) anst. (§. 94. Folg. 2.)
— 67 — 23 v. u. — — Folg. 2. anstatt Folg. 1.
— 74 — 16 v. u. — — CBD anstatt ABD.
— 76 — 8 v. u. — — §. 115. anstatt 115, Folg.
— 91 letzte Zeile — — z. B. EH anstatt B.
— 92 Zeile 4 — — BDH anstatt BD.
— 94 — 11 — — (§. 140.) anstatt (163.)
— 94 — 4 v. u. — — (Fig. 126.)
— 98 — 18 — — FGK anstatt FGH
— 101 — 24 — — (nach d. Lehrs.) anstatt (Folg. 2.)
— 103 — 3 — — AFC und DME.
— 106 — 16 17 22 — — 2 n R anstatt 4 n R.
— 111 — 5 v. u. — — jenes anstatt jedes.
— 114 — 8 v. u. — — Folg. 2. anstatt Folg. 1.
— 120 — 1 v. o. — — AKC anstatt ABD.
— 129 — 12 — — DN und HJ anstatt DH und HS.
— 144 — 17 — — Seitenflache anstatt Seite.

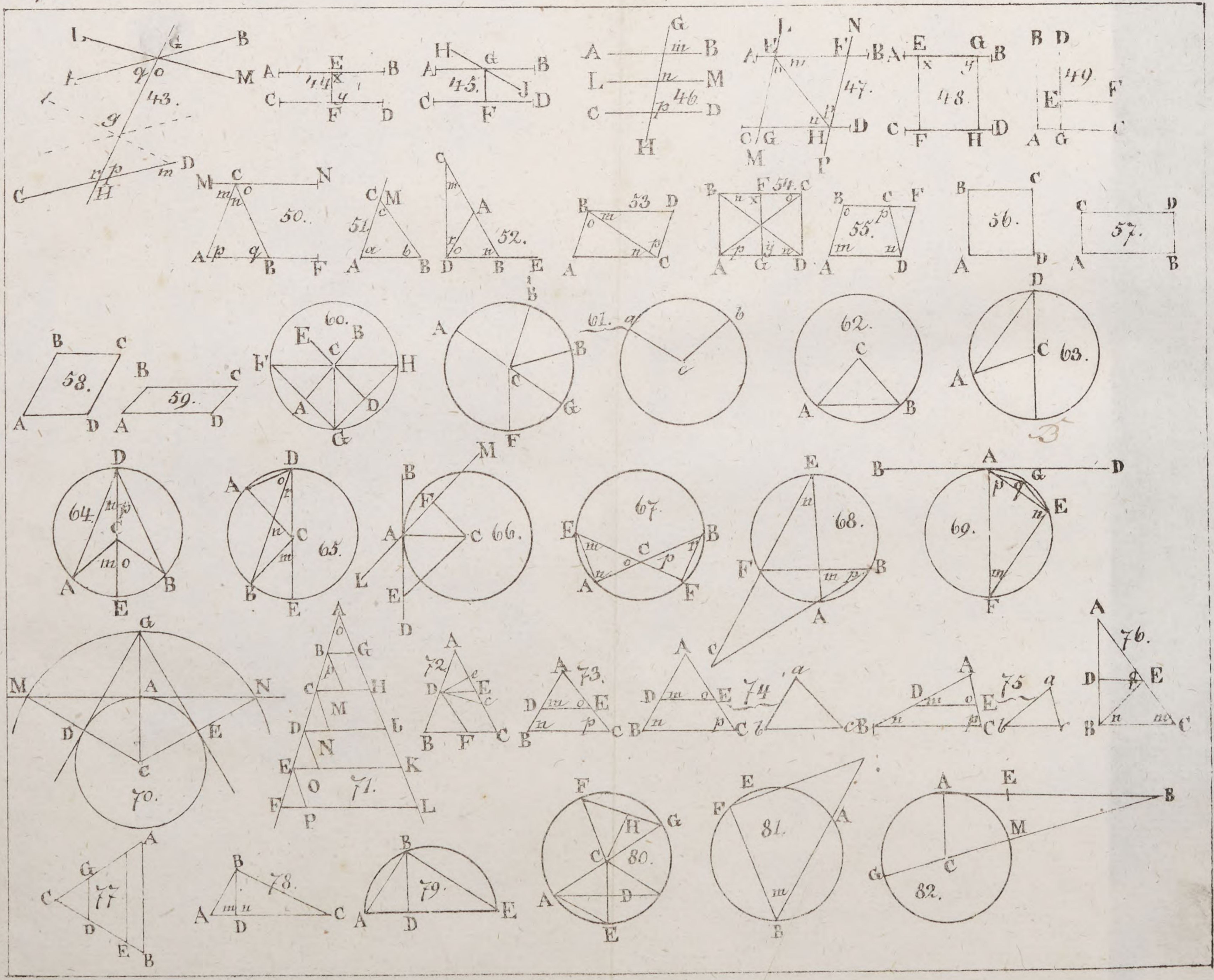
Zusatz zu §. 55. pag. 37.

Folg. 8. Wenn zwei Gerade (Fig. 151.) AB und BC sich schneiden, so müssen auch jede zwei Senkrechte auf ihnen d. i. DE und FG sich schneiden; denn sonst wären sie parallel. Da nun die AB auf DE senkrecht steht, so müßte sie auch zugleich auf FG oder deren Verlängerung senkrecht stehen; (Lehrs.) und weil auch BC auf FG senkrecht ist, so müßte (Folg. 1.) BC $\parallel$ AB seyn. (Contra hyp.)

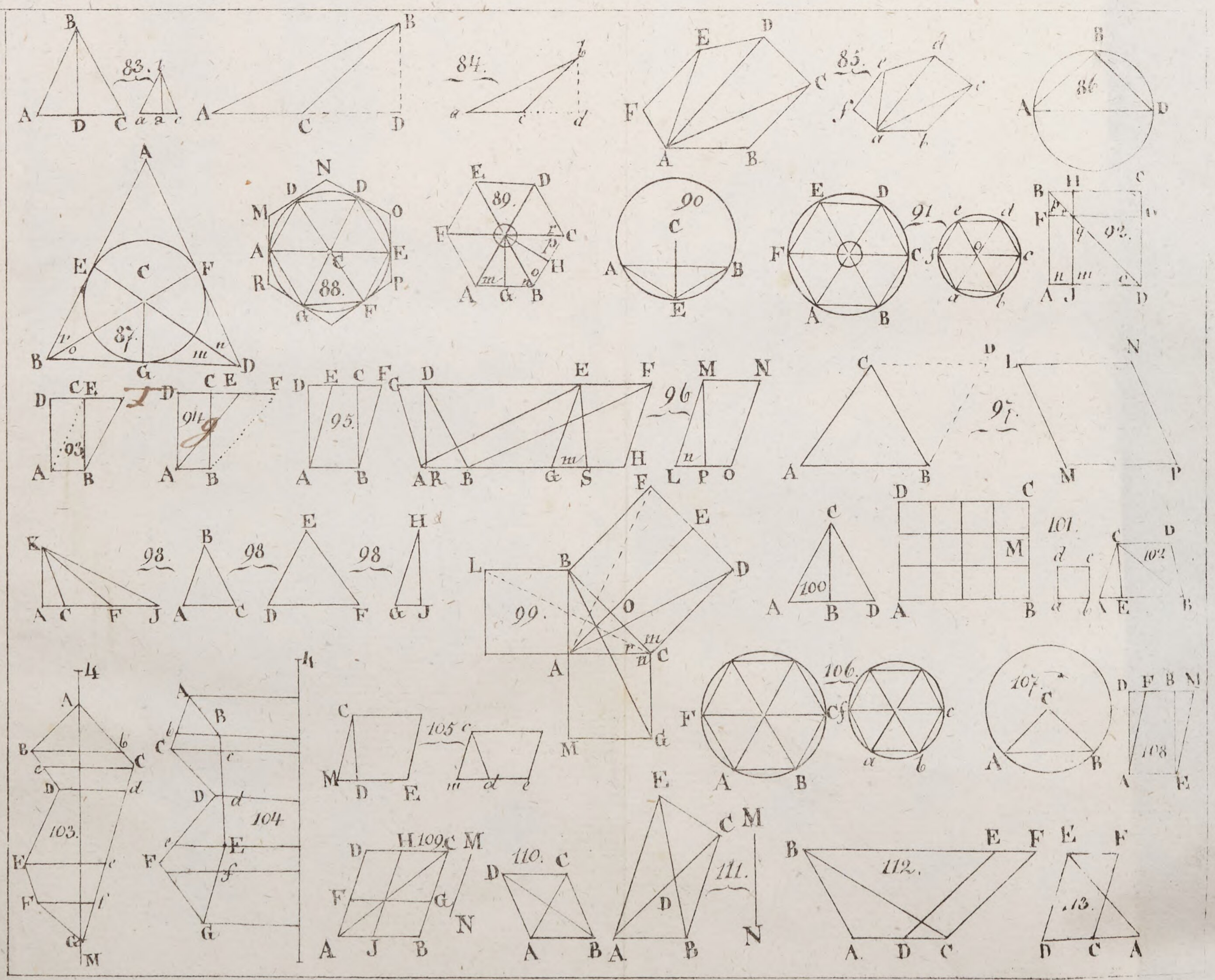
Tafel I.


1.
2.
3.
4
5
6
7
8
9.
10.
11.
12.
13
14.
15.
16.
17.
18.
19
20.
21
22.
23.
24
25
26.
27.
28.
29.
30.
31.
32.
33
34.
35.
36.
37.
38.
39.a.
39.b.
40
41.
42.

Tafel II.

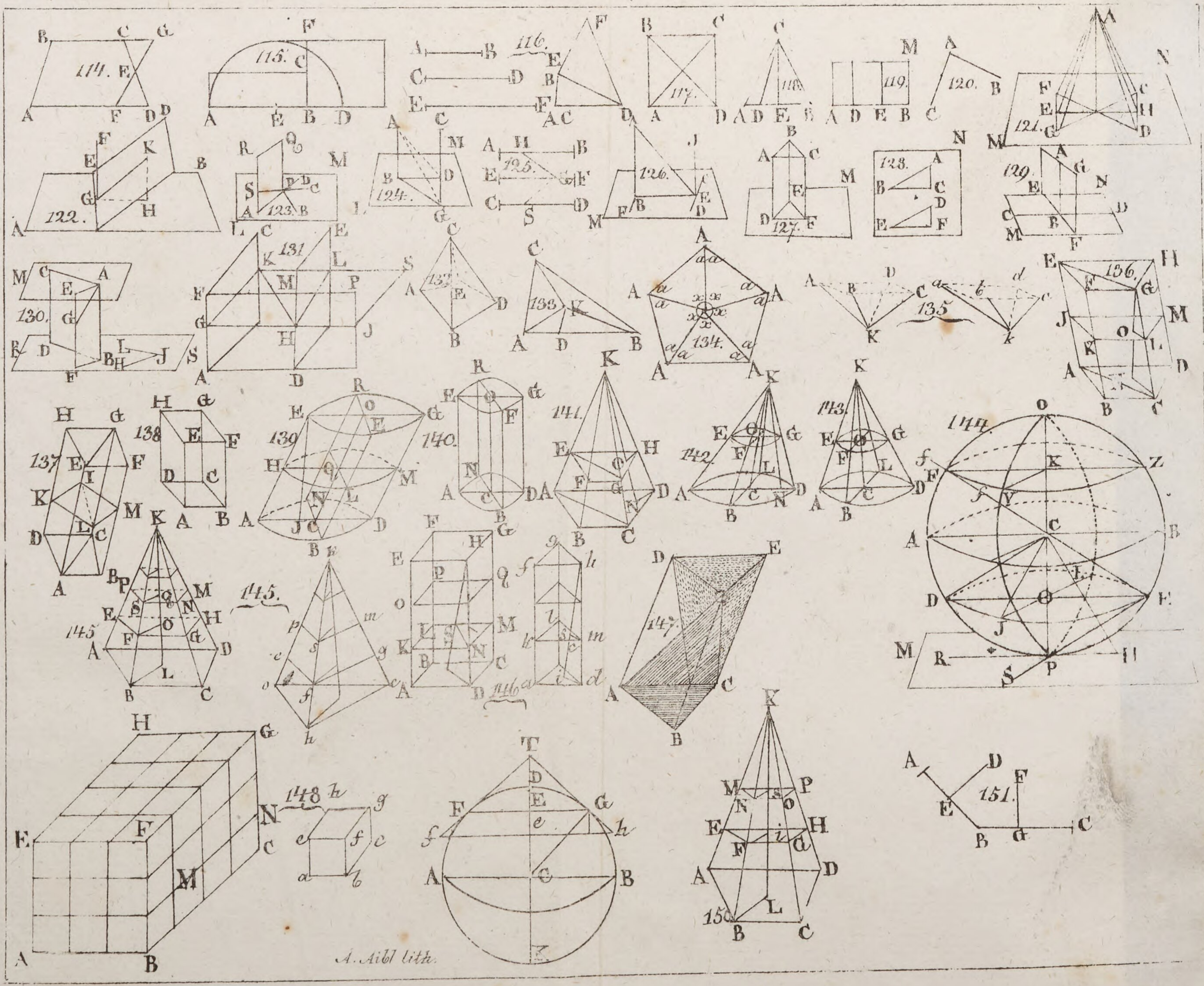


Tafel III.



83.
84.
85.
86.
87.
88.
89.
90
91.
92.
93.
94.
95.
96
97.
98.
99.
100
101.
102.
103.
104
105
106.
107.
108
109.
110.
111.
112.
113.

Tafel IV.


114.
115.
116.
117.
118.
119.
120.
121.
122.
123.
124.
125.
126.
127.
128.
129.
130.
131
132.
133.
134.
135.
136.
137
138
139.
140.
141.
142.
143.
144.
145.
146.
147.
148.
150.
151.
A. Aibl lith.

Bayerische StaatsBibliothek
Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Lehrbuch der Mathematik für Gymnasien und Lyzeen

Bd.: 2

1829

Bamberg, Staatsbibliothek -- RB.Ma.o.2#2
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11770726-0